

Dérivation du modèle de Schrödinger Non-Linéaire dipolaire à partir du modèle à N corps

Arnaud Triay

Stage effectué à l'Université Paris-Dauphine en Avril-Juillet 2015
sous la direction de Mathieu LEWIN (CNRS & Université Paris-Dauphine)

7 septembre 2015



ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Introduction

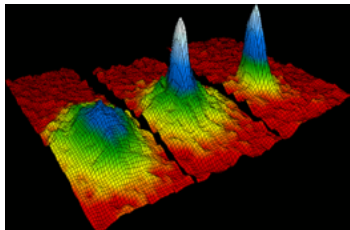
- Un peu de mécanique quantique
- Opérateurs de Schrödinger
- État fondamental et énergie fondamentale
- Matrices densité

Dérivation du modèle de Schrödinger Non-Linéaire

- Des modèles effectifs
- Une justification ?
- Des résultats connus
- Cas de l'interaction dipolaire
- Une stratégie de preuve

Un phénomène physique

- ▶ Un nouvel état de la matière
- ▶ Apparaît à très basse température pour un gaz dilué de bosons
- ▶ Un seul état quantique pour toutes les particules



Historique

- ▶ Bose : prédiction pour les photons (1924)
- ▶ Einstein : généralisations aux bosons (1925)
- ▶ Cornell et Wieman : première réalisation du premier condensât (1995), prix Nobel en 2001
- ▶ De plus en plus d'expérimentations avec différents types de particules, d'interaction, ...

Un peu de mécanique quantique

Un peu de mécanique quantique

Description quantique des particules

- ▶ Les particules quantiques, contrairement aux particules classiques qui sont décrites par un couple position-impulsion $(x, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, sont décrites par une fonction d'onde $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ normalisée $\|\Psi\|_{L^2} = 1$.

Un peu de mécanique quantique

Description quantique des particules

- ▶ Les particules quantiques, contrairement aux particules classiques qui sont décrites par un couple position-impulsion $(x, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, sont décrites par une fonction d'onde $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ normalisée $\|\Psi\|_{L^2} = 1$.
- ▶ Un système de particules X_1, \dots, X_N est décrit par une fonction d'onde $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^{d \times N}) = L^2(\mathbb{R}^d)^{\otimes N}$ normalisée $\|\Psi\|_{L^2} = 1$.

Un peu de mécanique quantique

Description quantique des particules

- ▶ Les particules quantiques, contrairement aux particules classiques qui sont décrites par un couple position-impulsion $(x, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, sont décrites par une fonction d'onde $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ normalisée $\|\Psi\|_{L^2} = 1$.
- ▶ Un système de particules X_1, \dots, X_N est décrit par une fonction d'onde $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^{d \times N}) = L^2(\mathbb{R}^d)^{\otimes N}$ normalisée $\|\Psi\|_{L^2} = 1$.

Interprétation probabiliste

- ▶ $|\Psi(x)|^2$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ représente la densité de probabilité de position.

Un peu de mécanique quantique

Description quantique des particules

- ▶ Les particules quantiques, contrairement aux particules classiques qui sont décrites par un couple position-impulsion $(x, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, sont décrites par une fonction d'onde $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ normalisée $\|\Psi\|_{L^2} = 1$.
- ▶ Un système de particules X_1, \dots, X_N est décrit par une fonction d'onde $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^{d \times N}) = L^2(\mathbb{R}^d)^{\otimes N}$ normalisée $\|\Psi\|_{L^2} = 1$.

Interprétation probabiliste

- ▶ $|\Psi(x)|^2$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ représente la densité de probabilité de position.
- ▶ $|\widehat{\Psi}(p)|^2$ représente la densité de probabilité d'impulsion ($\widehat{\Psi}$ est la transformée de Fourier de Ψ).

Un peu de mécanique quantique

Description quantique des particules

- ▶ Les particules quantiques, contrairement aux particules classiques qui sont décrites par un couple position-impulsion $(x, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, sont décrites par une fonction d'onde $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ normalisée $\|\Psi\|_{L^2} = 1$.
- ▶ Un système de particules X_1, \dots, X_N est décrit par une fonction d'onde $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^{d \times N}) = L^2(\mathbb{R}^d)^{\otimes N}$ normalisée $\|\Psi\|_{L^2} = 1$.

Interprétation probabiliste

- ▶ $|\Psi(x)|^2$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ représente la densité de probabilité de position.
- ▶ $|\widehat{\Psi}(p)|^2$ représente la densité de probabilité d'impulsion ($\widehat{\Psi}$ est la transformée de Fourier de Ψ).

Observables

Énergie d'une particule quantique $\mathcal{E}_q(\Psi) = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$ où $H = -\Delta + V$.

Position et énergie cinétique moyenne

$$\langle \Psi | x | \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} x |\Psi(x)|^2 dx,$$
$$\langle \Psi | (-i\nabla)^2 | \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \Psi(x)|^2 dx.$$

Bosons et fermions

Bosons et fermions

Indiscernabilité

La densité de probabilité de présence $|\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2$ est supposée symétrique, ce qui laisse plusieurs choix pour la fonction d'onde Ψ .

Bosons et fermions

Indiscernabilité

La densité de probabilité de présence $|\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2$ est supposée symétrique, ce qui laisse plusieurs choix pour la fonction d'onde Ψ .

Bosons

Quand Ψ est symétrique par rapport aux variables x_1, \dots, x_N , on dit que les particules sont des bosons.

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}), \forall \sigma \in \mathcal{S}(\{1, \dots, N\}). \quad (1)$$

Bosons et fermions

Indiscernabilité

La densité de probabilité de présence $|\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2$ est supposée symétrique, ce qui laisse plusieurs choix pour la fonction d'onde Ψ .

Bosons

Quand Ψ est symétrique par rapport aux variables x_1, \dots, x_N , on dit que les particules sont des bosons.

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}), \forall \sigma \in \mathcal{S}(\{1, \dots, N\}). \quad (1)$$

Fermions

Quand Ψ est antisymétrique par rapport aux variables x_1, \dots, x_N , on dit que les particules sont des fermions.

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \epsilon(\sigma)\Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}), \forall \sigma \in \mathcal{S}(\{1, \dots, N\}). \quad (2)$$

Bosons et fermions

Indiscernabilité

La densité de probabilité de présence $|\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2$ est supposée symétrique, ce qui laisse plusieurs choix pour la fonction d'onde Ψ .

Bosons

Quand Ψ est symétrique par rapport aux variables x_1, \dots, x_N , on dit que les particules sont des bosons.

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}), \forall \sigma \in \mathcal{S}(\{1, \dots, N\}). \quad (1)$$

Fermions

Quand Ψ est antisymétrique par rapport aux variables x_1, \dots, x_N , on dit que les particules sont des fermions.

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \epsilon(\sigma)\Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}), \forall \sigma \in \mathcal{S}(\{1, \dots, N\}). \quad (2)$$

Bosons et fermions

Indiscernabilité

La densité de probabilité de présence $|\Psi(x_1, \dots, x_N)|^2$ est supposée symétrique, ce qui laisse plusieurs choix pour la fonction d'onde Ψ .

Bosons

Quand Ψ est symétrique par rapport aux variables x_1, \dots, x_N , on dit que les particules sont des bosons.

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}(\{1, \dots, N\}). \quad (1)$$

Fermions

Quand Ψ est antisymétrique par rapport aux variables x_1, \dots, x_N , on dit que les particules sont des fermions.

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \epsilon(\sigma)\Psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}(\{1, \dots, N\}). \quad (2)$$

Dorénavant

Dans la suite, on ne considèrera que des bosons, et on notera $\mathfrak{h}^N = \mathfrak{h}_s^{\otimes N}$ le produit tensoriel symétrique de N copies de l'espace à 1 particule \mathfrak{h} .

Opérateur de Schrödinger

Opérateur de Schrödinger

Auto-adjonction

Sous les hypothèses $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $A \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, on définit $H = -(i\nabla + A)^2 + V$ sur C_c^∞ , il admet une unique extension dont le domaine $\mathcal{D}(H)$ est inclu dans le domaine des configurations d'énergie finie

Opérateur de Schrödinger

Auto-adjonction

Sous les hypothèses $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $A \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, on définit $H = -(i\nabla + A)^2 + V$ sur C_c^∞ , il admet une unique extension dont le domaine $\mathcal{D}(H)$ est inclu dans le domaine des configurations d'énergie finie

$$\mathcal{V}_A = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \int |(\nabla + iA)u|^2 + V|u|^2 < \infty \right\}.$$

C'est l'extension de Friedrichs.

Opérateur de Schrödinger

Auto-adjonction

Sous les hypothèses $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $A \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, on définit $H = -(i\nabla + A)^2 + V$ sur C_c^∞ , il admet une unique extension dont le domaine $\mathcal{D}(H)$ est inclu dans le domaine des configurations d'énergie finie

$$\mathcal{V}_A = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3), \int |(\nabla + iA)u|^2 + V|u|^2 < \infty \right\}.$$

C'est l'extension de Friedrichs.

Niveaux d'énergie discrets

Quand $V(x) \rightarrow \infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$, on dit que le potentiel V est confinant. Alors H est à résolvante compacte et son spectre est discret avec pour seul point d'accumulation ∞ .

État fondamental et énergie fondamentale

État fondamental et énergie fondamentale

L'énergie de N particules quantiques, soumises à un potentiel V , à un champ magnétique A et à une interaction w entre elles 2 à 2 est donnée par le hamiltonien

$$H_N = \sum_{j=1}^N \left(-(\nabla_{x_j} + iA(x_j))^2 + V(x_j) \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} w(|x_i - x_j|). \quad (3)$$

État fondamental et énergie fondamentale

L'énergie de N particules quantiques, soumises à un potentiel V , à un champ magnétique A et à une interaction w entre elles 2 à 2 est donnée par le hamiltonien

$$H_N = \sum_{j=1}^N \left(-(\nabla_{x_j} + iA(x_j))^2 + V(x_j) \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} w((x_i - x_j)). \quad (3)$$

Un état $\Psi \in (L^2)^{\otimes N}$ de plus basse énergie est appelé un état fondamental

$$E(N) := \langle \Psi, H_N \Psi \rangle = \inf_{\substack{\phi \in (L^2)^{\otimes N} \\ \|\phi\|_{L^2} = 1}} \langle \phi, H_N \phi \rangle \quad (4)$$

État fondamental et énergie fondamentale

L'énergie de N particules quantiques, soumises à un potentiel V , à un champ magnétique A et à une interaction w entre elles 2 à 2 est donnée par le hamiltonien

$$H_N = \sum_{j=1}^N \left(-(\nabla_{x_j} + iA(x_j))^2 + V(x_j) \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} w((x_i - x_j)). \quad (3)$$

Un état $\Psi \in (L^2)^{\otimes N}$ de plus basse énergie est appelé un état fondamental

$$E(N) := \langle \Psi, H_N \Psi \rangle = \inf_{\substack{\phi \in (L^2)^{\otimes N} \\ \|\phi\|_{L^2} = 1}} \langle \phi, H_N \phi \rangle \quad (4)$$

L'énergie d'un état fondamental \mathcal{E}_N est appelée énergie fondamentale.

Matrice densité

Matrice densité

Matrice densité

La matrice densité Γ associée à la fonction d'onde Ψ d'un système de N particules est le projecteur orthogonal sur cette fonction dans $(L^2)^{\otimes N}$.

$$\Gamma = |\Psi\rangle \langle\Psi| \quad (5)$$

Matrice densité

Matrice densité

La matrice densité Γ associée à la fonction d'onde Ψ d'un système de N particules est le projecteur orthogonal sur cette fonction dans $(L^2)^{\otimes N}$.

$$\Gamma = |\Psi\rangle \langle \Psi| \quad (5)$$

Matrice densité réduite

Si l'on ne regarde plus que k particules parmi les N , ce sous-système se trouve dans une superposition d'états que l'on appelle mélange statistique,

$$\Gamma^{(k)} := \text{Tr}_{k+1 \rightarrow N} (\Gamma) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n |\Psi_{k,n}\rangle \langle \Psi_{k,n}|, \quad (6)$$

où le membre de droite est la décomposition spectrale de $\Gamma^{(k)}$. Elle s'interprète comme une probabilité que le sous-système apparaisse avec la fonction d'onde $\Psi_{k,n}$.

Utilité des matrices densités

Utilité des matrices densités

Trace partielle

Soit $\gamma \in \mathfrak{S}_1(\mathfrak{h}^N)$, alors par dualité, il existe un unique opérateur $\gamma^{(k)} \in \mathfrak{S}_1(\mathfrak{h}^k)$ tel que

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{h}^k} (A\gamma^{(k)}) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{h}^N} (A \otimes \mathbb{1}_{N-k} \gamma), \forall A \in \mathcal{K}(\mathfrak{h}^k) \quad (7)$$

On note $\gamma^{(k)} = \mathrm{Tr}_{k+1 \rightarrow N} \gamma$.

Utilité des matrices densités

Trace partielle

Soit $\gamma \in \mathfrak{S}_1(\mathfrak{h}^N)$, alors par dualité, il existe un unique opérateur $\gamma^{(k)} \in \mathfrak{S}_1(\mathfrak{h}^k)$ tel que

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{h}^k} (A\gamma^{(k)}) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{h}^N} (A \otimes \mathbb{1}_{N-k} \gamma), \forall A \in \mathcal{K}(\mathfrak{h}^k) \quad (7)$$

On note $\gamma^{(k)} = \mathrm{Tr}_{k+1 \rightarrow N} \gamma$.

On a la relation suivante

$$\frac{\langle \Psi, H_N \Psi \rangle}{N} = \frac{\mathrm{Tr}(H_N \Gamma)}{N} = \mathrm{Tr}((-\Delta + V)\Gamma^{(1)}) + \frac{N-1}{2} \mathrm{Tr}(w(x_1 - x_2)\Gamma^{(2)}) \quad (8)$$

Utilité des matrices densités

Trace partielle

Soit $\gamma \in \mathfrak{S}_1(\mathfrak{h}^N)$, alors par dualité, il existe un unique opérateur $\gamma^{(k)} \in \mathfrak{S}_1(\mathfrak{h}^k)$ tel que

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{h}^k} (A\gamma^{(k)}) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{h}^N} (A \otimes \mathbb{1}_{N-k} \gamma), \forall A \in \mathcal{K}(\mathfrak{h}^k) \quad (7)$$

On note $\gamma^{(k)} = \mathrm{Tr}_{k+1 \rightarrow N} \gamma$.

On a la relation suivante

$$\frac{\langle \Psi, H_N \Psi \rangle}{N} = \frac{\mathrm{Tr}(H_N \Gamma)}{N} = \mathrm{Tr}((-\Delta + V)\Gamma^{(1)}) + \frac{N-1}{2} \mathrm{Tr}(w(x_1 - x_2)\Gamma^{(2)}) \quad (8)$$

Champ moyen

Pour que les deux termes dans (8) soient de même ordre, on modifie l'interaction entre particules pour se placer dans le régime de champ moyen

$$w \longrightarrow \frac{1}{N-1} w. \quad (9)$$

Il n'y a pas de justification physique rigoureuse de cette opération, hormis la modification artificielle de w en expérimentations.

Modèles effectifs

Le calcul (numérique) de l'énergie et de l'état fondamental de H_N est très difficile ($3 \times N$ degrés de liberté), c'est pourquoi on utilise des modèles effectifs. Lors de la condensation, les particules se placent toutes dans le même état, il suffit alors de résoudre un problème à 1 particule.

Modèles effectifs

Le calcul (numérique) de l'énergie et de l'état fondamental de H_N est très difficile ($3 \times N$ degrés de liberté), c'est pourquoi on utilise des modèles effectifs. Lors de la condensation, les particules se placent toutes dans le même état, il suffit alors de résoudre un problème à 1 particule.

NLS

$$\mathcal{E}_{nls}(u) := \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla + iA)u(x)|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u(x)|^2 + a \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^4 dx, \quad (10)$$

où a est un paramètre.

Modèles effectifs

Le calcul (numérique) de l'énergie et de l'état fondamental de H_N est très difficile ($3 \times N$ degrés de liberté), c'est pourquoi on utilise des modèles effectifs. Lors de la condensation, les particules se placent toutes dans le même état, il suffit alors de résoudre un problème à 1 particule.

NLS

$$\mathcal{E}_{nls}(u) := \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla + iA)u(x)|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u(x)|^2 + a \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^4 dx, \quad (10)$$

où a est un paramètre.

Hartree

$$\mathcal{E}_H^N(u) := \frac{\langle u^{\otimes N}, H_N u^{\otimes N} \rangle}{N} \quad (11)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla + iA)u(x)|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V(x)|u(x)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} w((x-y))|u(x)|^2|u(y)|^2 dx dy. \quad (12)$$

Dérivation des modèles effectifs à partir du modèle à N corps

Dérivation des modèles effectifs à partir du modèle à N corps

Justification ?

On aimerait trouver une justification de la fonctionnelle \mathcal{E}_{nlS} , pour cela on considère un nouveau potentiel d'interaction (encore), dilaté cette fois ci d'un facteur N^β .

$$\frac{1}{N-1} w \longrightarrow w_N := \frac{1}{N-1} N^{d\beta} w(N^\beta \cdot) \quad (13)$$

Dérivation des modèles effectifs à partir du modèle à N corps

Justification ?

On aimerait trouver une justification de la fonctionnelle \mathcal{E}_{nls} , pour cela on considère un nouveau potentiel d'interaction (encore), dilaté cette fois ci d'un facteur N^β .

$$\frac{1}{N-1} w \longrightarrow w_N := \frac{1}{N-1} N^{d\beta} w(N^\beta \cdot) \quad (13)$$

L'idée est d'approcher en deux temps le modèle à N corps par le modèle de NLS en passant par le modèle de Hartree. En effet, si on suppose $w \in L^1$, le terme d'interaction dans \mathcal{E}_H est

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} N^{3\beta} w(N^\beta(x-y)) |u(x)|^2 |u(y)|^2 dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (N^{3\beta} w(N^\beta \cdot) \star |u|^2) |u|^2 \\ &\longrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^3} w \right) \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4, \end{aligned}$$

quand $N \rightarrow \infty$.

Résultat pour une interaction courte portée

Théorème (Lewin-Nam-Rougerie 14)

Soit $\beta > 0$. Supposons $V(x) > C|x|^s - C$, $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $A \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $w \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $|x|w(x) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ avec $w(x) = w(-x)$. Si de plus w est Hartree stable, c'est-à-dire que pour tout $\rho \geq 0$ on a

$$\iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} w(x-y)\rho(x)\rho(y) dx dy \geq 0,$$

alors pour une certaine constante $C > 0$, on a

$$e_{nls} + CN^{-\beta} \geq \frac{E(N)}{N} \geq e_{nls} - CN^{-\beta} - CN^{d\beta - \frac{1}{2+d/s+d/2}},$$

dès que $0 \leq \beta \leq \frac{1}{d(2+d/s+d/2)}$.

Cas de l'interaction dipolaire

Cas de l'interaction dipolaire

Potentiel dipolaire

Le potentiel d'interaction entre deux dipôles alignés dans une même direction donnée par $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ est donné par

$$K(x - y) = \frac{1 - 3 \cos^2(\theta_{x,y})}{|x - y|^3}, \quad (14)$$

où $\theta_{x,y} = (x - y) \cdot \vec{n} / |x - y|$ est l'angle entre $x - y$ et le vecteur \vec{n} .

Cas de l'interaction dipolaire

Potentiel dipolaire

Le potentiel d'interaction entre deux dipôles alignés dans une même direction donnée par $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ est donné par

$$K(x - y) = \frac{1 - 3 \cos^2(\theta_{x,y})}{|x - y|^3}, \quad (14)$$

où $\theta_{x,y} = (x - y) \cdot \vec{n} / |x - y|$ est l'angle entre $x - y$ et le vecteur \vec{n} .

Modèle effectif dipolaire

Le modèle effectif d'un gaz condensé de particules dipolaire est donné par la fonctionnelle de Schrödinger Non Linéaire dipolaire :

$$\mathcal{E}_{nls}^d(u, \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}^3} |(\nabla + iA)u|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} V|u|^2 + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^3} |u|^4 + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} (K \star |u|^2)|u|^2, \quad (15)$$

où λ_1 et λ_2 sont des paramètres réels.

Résultats pour une interaction dipolaire

Théorème (Carles et Hajaiej 14)

On suppose que $A = 0$ et $V(x) \rightarrow \infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$ alors

i) Si

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 > 0 \text{ et } \lambda_1 \geq \frac{4\pi}{3} \lambda_2, \\ \text{ou} \\ \lambda_2 < 0 \text{ et } \lambda_1 \geq -\frac{8\pi}{3} \lambda_2, \end{array} \right.$$

alors \mathcal{E}_{nls}^d possède un unique minimiseur.

ii) Si

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 > 0 \text{ et } \lambda_1 < \frac{4\pi}{3} \lambda_2, \\ \text{ou} \\ \lambda_2 < 0 \text{ et } \lambda_1 < -\frac{8\pi}{3} \lambda_2, \end{array} \right.$$

alors $e_{nls}^d = -\infty$.

Dérivation pour une interaction dipolaire

Théorème

Soit $\beta > 0$. Supposons $V(x) > C|x|^s - C$, $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $A \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$, $w \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ avec $w(x) = w(-x)$. Si de plus w vérifie

$$\left| w(x-y) - \lambda_2 \frac{1 - 3\cos^2(\theta_{x,y})}{|x-y|^3} \right| \leq C \frac{1}{|x-y|^{4+\epsilon}} \text{ pour } |x-y| \geq 1, \quad (16)$$

et si classiquement stable, c'est-à-dire que pour tout $\rho \geq 0$ on a

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} w(x_i - x_j) \geq -CN, \quad \forall x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d, \forall N \geq 2. \quad (17)$$

alors pour une certaine constante $C > 0$, on a

$$e_{nls}^d(\lambda_1, \lambda_2) + CN^{-\beta} \geq \frac{E(N)}{N} \geq e_{nls}^d(\lambda_1, \lambda_2) - CN^{\frac{-d\beta(1+2d/s+d)}{(3+2d/s+d)}} - CN^{-\beta}, \quad (18)$$

dès que $0 < \beta < \frac{1}{2d(1+d/2+d/s)}$, où $\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}^3} (w - \kappa K \mathbb{1}_{|x| \geq R}) dx$.

Stratégie de la preuve

Stratégie de la preuve

Localisation à basse énergie

La partie du hamiltonien $\sum_i h_i$ avec $h_i = -(i\nabla_{x_i} + A(x_i))^2 + V(x_i)$ est à résolvante compacte et son spectre d'énergie est discret et tend vers $l'∞$. À faible interaction, le système aura donc tendance à se localiser sur les bas états d'énergie.

$$\text{Tr}(h\Gamma_N^{(1)}) \leq C \quad (19)$$

On dira que $\Gamma_N^{(2)}$ est proche de son projeté sur $\ker(P_-^{\otimes 2} - \text{Id}_{\mathcal{H}^2})$ où $P_- = \mathbb{1}_{]-\infty, L[}(h)$.

Stratégie de la preuve

Localisation à basse énergie

La partie du hamiltonien $\sum_i h_i$ avec $h_i = -(i\nabla_{x_i} + A(x_i))^2 + V(x_i)$ est à résolvante compacte et son spectre d'énergie est discret et tend vers $l'∞$. À faible interaction, le système aura donc tendance à se localiser sur les bas états d'énergie.

$$\text{Tr}(h\Gamma_N^{(1)}) \leq C \quad (19)$$

On dira que $\Gamma_N^{(2)}$ est proche de son projeté sur $\ker(P_-^{\otimes 2} - \text{Id}_{\mathfrak{H}_2})$ où $P_- = \mathbb{1}_{]-\infty; L[}(h)$.

$$\text{tr}_{\mathfrak{H}} \left[h\Gamma_N^{(1)} \right] \geq \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathfrak{H}^2} \left[(h_1 + h_2) P_-^{\otimes 2} \gamma_N^{(2)} P_-^{\otimes 2} \right], \quad (20)$$

où $P_+ = \text{Id} - P_-$.

Localisation à basse énergie

La partie du hamiltonien $\sum_i h_i$ avec $h_i = -(i\nabla_{x_i} + A(x_i))^2 + V(x_i)$ est à résolvante compacte et son spectre d'énergie est discret et tend vers $l'∞$. À faible interaction, le système aura donc tendance à se localiser sur les bas états d'énergie.

$$\text{Tr}(h\Gamma_N^{(1)}) \leq C \quad (19)$$

On dira que $\Gamma_N^{(2)}$ est proche de son projeté sur $\ker(P_-^{\otimes 2} - \text{Id}_{\mathfrak{H}_2})$ où $P_- = \mathbb{1}_{]-\infty; L[}(h)$.

$$\text{tr}_{\mathfrak{H}} \left[h\Gamma_N^{(1)} \right] \geq \frac{1}{2} \text{tr}_{\mathfrak{H}^2} \left[(h_1 + h_2) P_-^{\otimes 2} \gamma_N^{(2)} P_-^{\otimes 2} \right], \quad (20)$$

où $P_+ = \text{Id} - P_-$. De même, on a

$$\text{tr} \left[w_N \gamma_N^{(2)} \right] \geq \text{tr} \left[w_N P_-^{\otimes 2} \gamma_N^{(2)} P_-^{\otimes 2} \right] - CN^{d\beta} L^{-1/2}. \quad (21)$$

Stratégie de la preuve (2)

Stratégie de la preuve (2)

Lemme (Théorème de De Finetti quantique quantitatif pour état localisé)

Soit γ_N un état à N corps et $L > 0$, alors il existe une mesure positive sur SP_{-L} notée μ_N telle que

$$\operatorname{tr} \left| P_{-}^{\otimes 2} \gamma_N^{(2)} P_{-}^{\otimes 2} - \int_{SP_{-L}} |u^{\otimes 2}\rangle \langle u^{\otimes 2}| d\mu_N(u) \right| \leq \frac{8N_L}{N}.$$

De plus $1 \geq \mu_N(SP_{-L}) \geq \frac{N\lambda^2 - \lambda}{N-1}$ où $\lambda = \operatorname{tr} P_{-} \gamma_N^{(1)}$ et $N_L = \dim(P_{-L})$.

Stratégie de la preuve (2)

Lemme (Théorème de De Finetti quantique quantitatif pour état localisé)

Soit γ_N un état à N corps et $L > 0$, alors il existe une mesure positive sur $SP_{-\mathfrak{H}}$ notée μ_N telle que

$$\operatorname{tr} \left| P_{-}^{\otimes 2} \gamma_N^{(2)} P_{-}^{\otimes 2} - \int_{SP_{-\mathfrak{H}}} |u^{\otimes 2}\rangle \langle u^{\otimes 2}| d\mu_N(u) \right| \leq \frac{8N_L}{N}.$$

De plus $1 \geq \mu_N(SP_{-\mathfrak{H}}) \geq \frac{N\lambda^2 - \lambda}{N-1}$ où $\lambda = \operatorname{tr} P_{-} \gamma_N^{(1)}$ et $N_L = \dim(P_{-\mathfrak{H}})$.

Lemme

On a $N_L \leq CL^{d/s+d/2}$.

Stratégie de la preuve (2)

Lemme (Théorème de De Finetti quantique quantitatif pour état localisé)

Soit γ_N un état à N corps et $L > 0$, alors il existe une mesure positive sur $SP_{-\mathfrak{H}}$ notée μ_N telle que

$$\mathrm{tr} \left| P_{-}^{\otimes 2} \gamma_N^{(2)} P_{-}^{\otimes 2} - \int_{SP_{-\mathfrak{H}}} |u^{\otimes 2}\rangle \langle u^{\otimes 2}| d\mu_N(u) \right| \leq \frac{8N_L}{N}.$$

De plus $1 \geq \mu_N(SP_{-\mathfrak{H}}) \geq \frac{N\lambda^2 - \lambda}{N-1}$ où $\lambda = \mathrm{tr} P_{-} \gamma_N^{(1)}$ et $N_L = \dim(P_{-\mathfrak{H}})$.

Lemme

On a $N_L \leq CL^{d/s+d/2}$.

Approximation par la théorie de Hartree

$$\mathrm{Tr} H_2 \int_{SP_{-\mathfrak{H}}} |u^{\otimes 2}\rangle \langle u^{\otimes 2}| d\mu_N(u) \geq e_H^N \mu_N(SP_{-\mathfrak{H}}) \quad (22)$$

Stratégie de la preuve (2)

Lemme (Théorème de De Finetti quantique quantitatif pour état localisé)

Soit γ_N un état à N corps et $L > 0$, alors il existe une mesure positive sur $SP_{-\mathfrak{H}}$ notée μ_N telle que

$$\mathrm{tr} \left| P_{-}^{\otimes 2} \gamma_N^{(2)} P_{-}^{\otimes 2} - \int_{SP_{-\mathfrak{H}}} |u^{\otimes 2}\rangle \langle u^{\otimes 2}| d\mu_N(u) \right| \leq \frac{8N_L}{N}.$$

De plus $1 \geq \mu_N(SP_{-\mathfrak{H}}) \geq \frac{N\lambda^2 - \lambda}{N-1}$ où $\lambda = \mathrm{tr} P_{-} \gamma_N^{(1)}$ et $N_L = \dim(P_{-\mathfrak{H}})$.

Lemme

On a $N_L \leq CL^{d/s+d/2}$.

Approximation par la théorie de Hartree

$$\mathrm{Tr} H_2 \int_{SP_{-\mathfrak{H}}} |u^{\otimes 2}\rangle \langle u^{\otimes 2}| d\mu_N(u) \geq e_H^N \mu_N(SP_{-\mathfrak{H}}) \quad (22)$$

Il rest à montrer que $\mu_N(SP_{-\mathfrak{H}}) \simeq 1$ quand $N \rightarrow \infty$.

Stratégie de la preuve (3)

Stratégie de la preuve (3)

Approximation par la théorie de Hartree (2)

En résumé, pour l'instant on a

$$e_H^N \geq \frac{E(N)}{N} \geq e_H^N - C \frac{N^{d\beta}}{L^{1/2}} - C \frac{L^{1+d/s+d/2}}{N} - C \frac{N^{d\beta} L}{N}. \quad (23)$$

Stratégie de la preuve (3)

Approximation par la théorie de Hartree (2)

En résumé, pour l'instant on a

$$e_H^N \geq \frac{E(N)}{N} \geq e_H^N - C \frac{N^{d\beta}}{L^{1/2}} - C \frac{L^{1+d/s+d/2}}{N} - C \frac{N^{d\beta}L}{N}. \quad (23)$$

De Hartree à NLS

Lemme

Pour $u \in \mathcal{V}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u|(x)|^2 dx \leq \mathcal{E}_H(u) + C \quad (24)$$

et

$$|\mathcal{E}_H(u) - \mathcal{E}_{nls}^d(u)| \leq CN^{-\beta} \left(1 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u|(x)|^2 dx \right)^2. \quad (25)$$

Stratégie de la preuve (4)

Stratégie de la preuve (4)

Finalement, on a

$$e_{nls}^d + CN^{-\beta} \geq \frac{E(N)}{N} \geq e_{nls}^d - C \frac{N^{d\beta}}{L^{1/2}} - C \frac{L^{1+d/s+d/2}}{N} - C \frac{N^{d\beta} L}{N} - CN^{-\beta}. \quad (26)$$

Stratégie de la preuve (4)

Finalement, on a

$$e_{nls}^d + CN^{-\beta} \geq \frac{E(N)}{N} \geq e_{nls}^d - C \frac{N^{d\beta}}{L^{1/2}} - C \frac{L^{1+d/s+d/2}}{N} - C \frac{N^{d\beta} L}{N} - CN^{-\beta}. \quad (26)$$

Il faut alors choisir L de telle sorte que

$$N^{2d\beta} \ll L \ll N^{\min(1-d\beta, \frac{1}{(1+d/s+d/2)})}. \quad (27)$$

Ceci n'est possible que si $0 < \beta < \min(1/(3d), 1/(2d(1 + d/2 + d/s)))$. Alors en posant $L = N^\alpha$ et en optimisant par rapport à α , on trouve le résultat.

Merci pour votre attention !