

Géodésiques

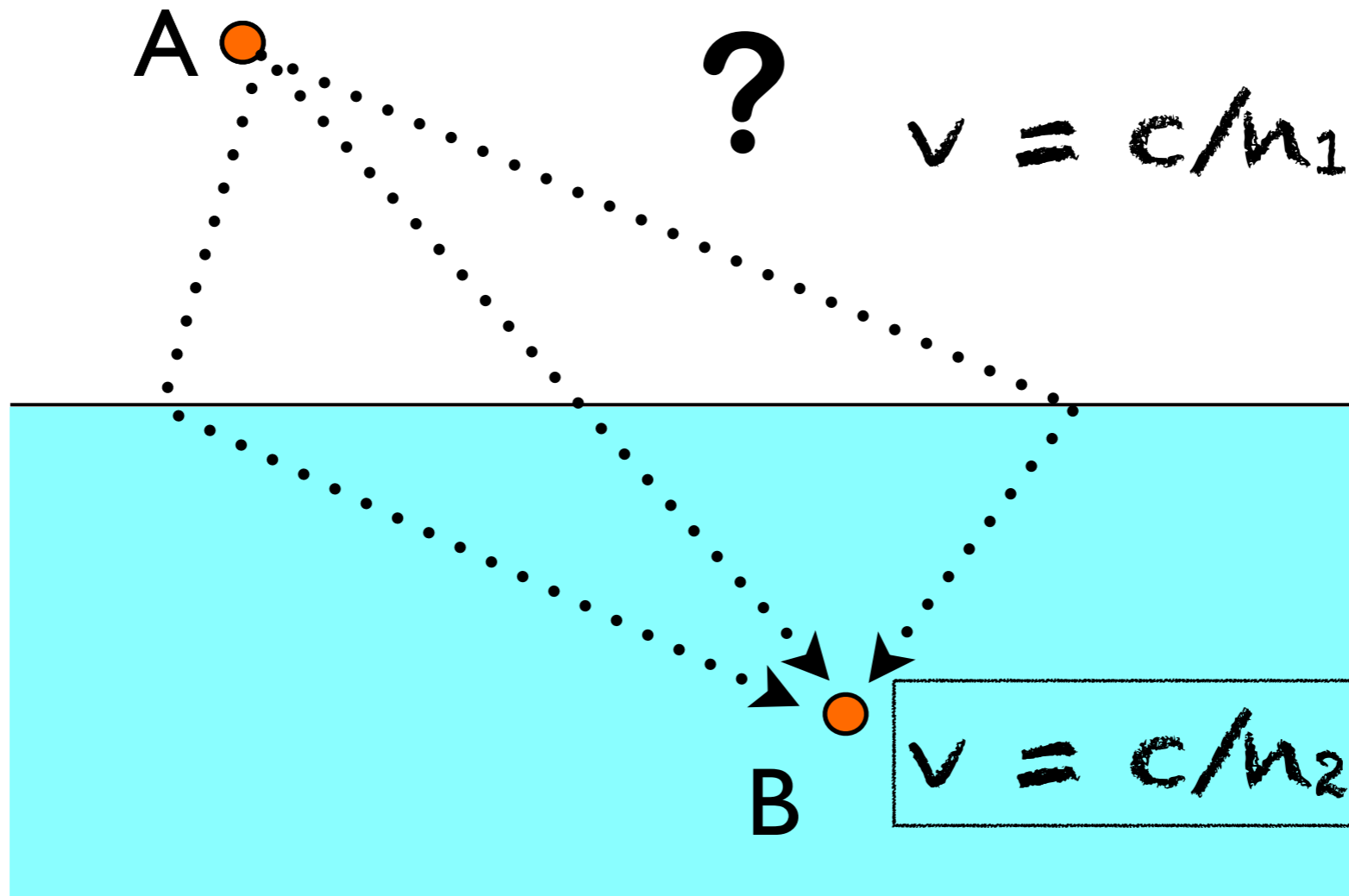
Minimisation du temps, de l'énergie et de la distance, un principe récurrent de la physique:

« Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve »
(**Seconde loi de Newton**)

« La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit extrémale. »
(**Principe de Fermat**)

« lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible »
(**Principe de moindre Action**, Maupertuis)

Trajet de la lumière



Loi de Snell-Descartes:

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

Étude variationnelle

→ Minimiser $J(x) = \int_0^1 f(t, x(t), x'(t)) dt$

ex: longueur $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$

→ Condition d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'}$$

Caractérisation des géodésiques



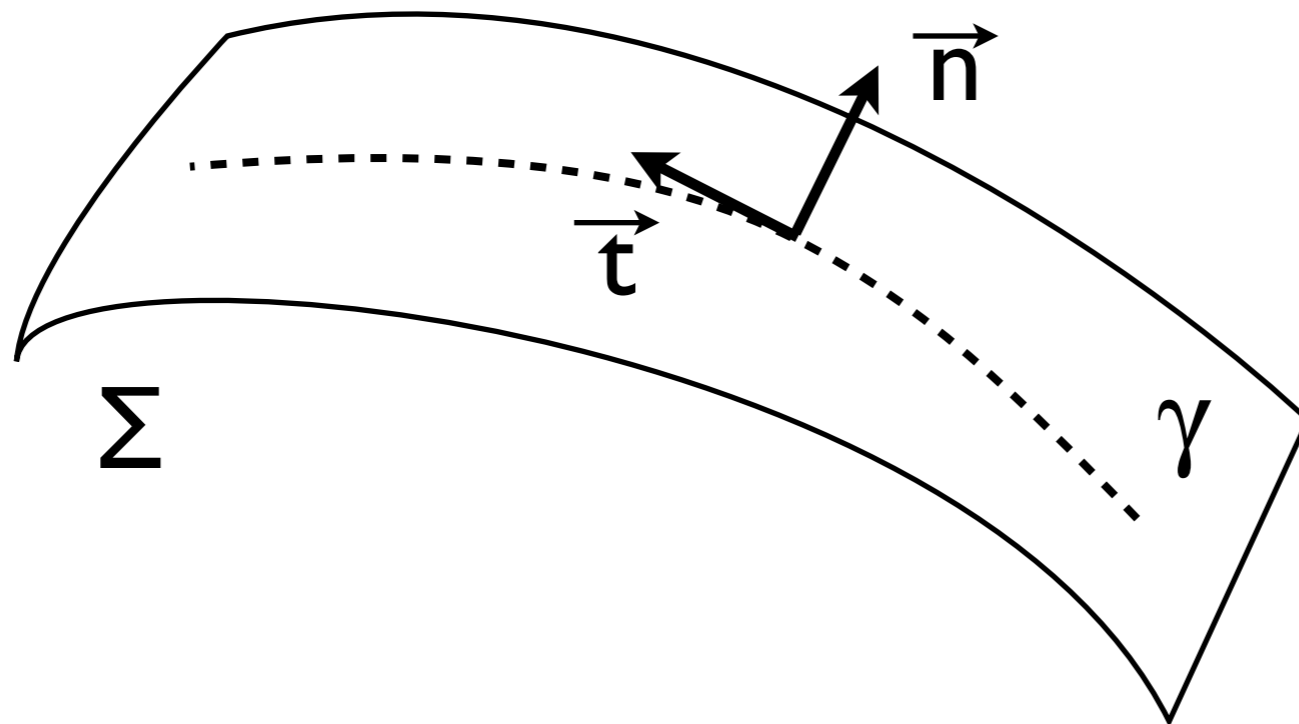
La condition d'EL appliquée à la longueur:

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x'_v x'' + y'_v y'' + z'_v z'') - (x'' x' + y'' y' + z'' z')(x'_v x' + y'_v y' + z'_v z') = 0$$



Colinéarité de la normale principale à la normale à la surface:

$$\det(\vec{N}, \frac{d\vec{r}}{du}, \frac{d^2\vec{r}}{du^2}) = 0$$



Un exemple: le cylindre

→ $\vec{r} : [0; 2\pi[\times \mathbb{R} \ni (\theta, \lambda) \longrightarrow \vec{u} + \lambda \vec{k}$

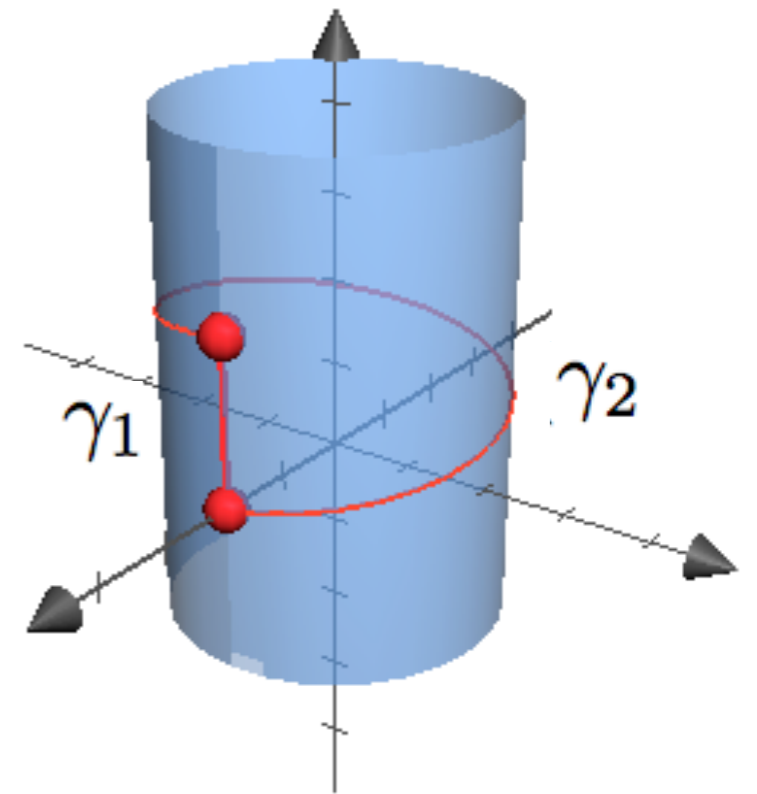
$$(\gamma''(t) | \partial_\theta \vec{r}) = (\gamma''(t) | \partial_\lambda \vec{r}) = 0$$

→ $\theta'' = \lambda'' = 0$

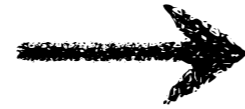
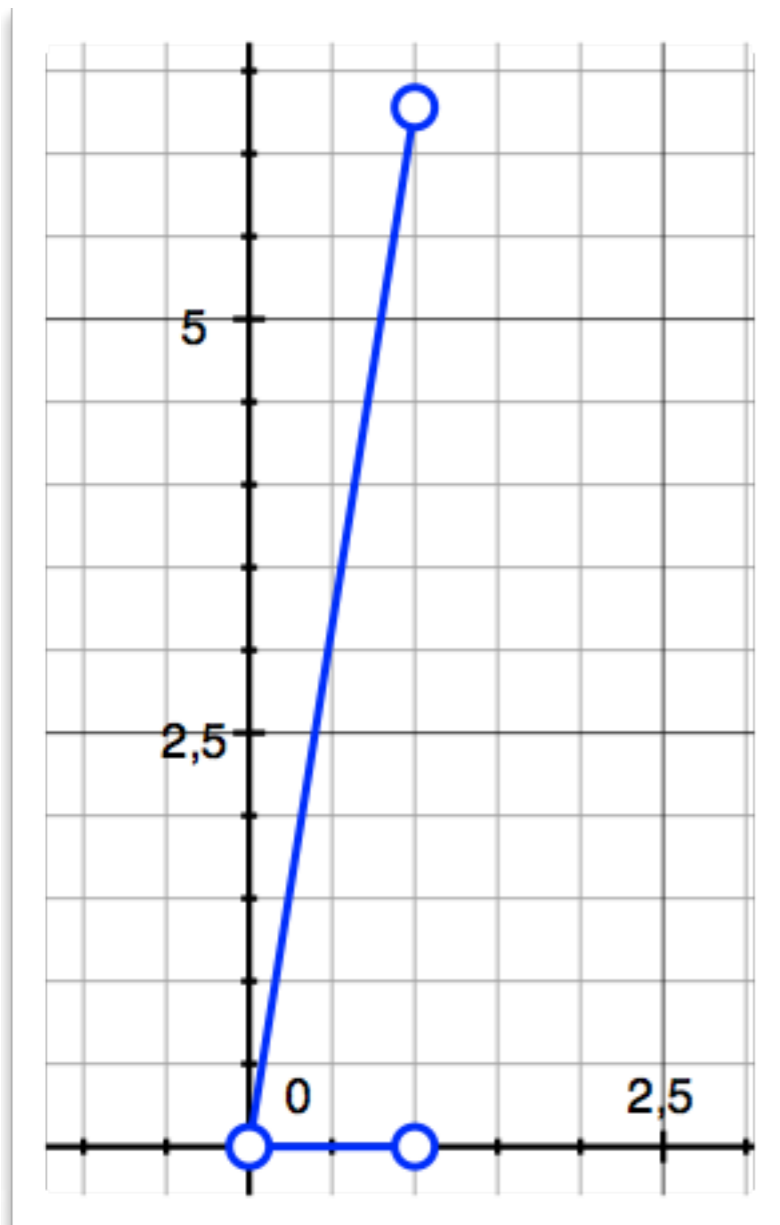
les courbes cherchées sont les hélices

$$d(\gamma_1(0), \gamma_1(1)) = 1, \text{ tandis que } L(\gamma_2) = 2\pi + 1$$

→ Une seule géodésique minimale.



Développement du cylindre

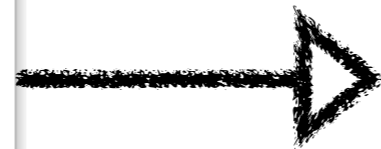


Géodésiques reliant 2 points ?



Géodésique minimale ?

$$d(\vec{r}(\theta_0, \lambda_0), \vec{r}(\theta_1, \lambda_1)) \\ = (\theta_0 - \theta_1 + 2p_0\pi)^2 + (\lambda_0 - \lambda_1)^2$$



localement minimale

$$\{\gamma_p : [0; 1] \ni t \mapsto \vec{u}(\theta_0 + t(\theta_1 - \theta_0 + 2(p + p_0)\pi)) + (\lambda_0 + t(\lambda_1 - \lambda_0))\vec{k}, p \in \mathbb{Z}\}$$

Surface de révolution

$$(\theta, \lambda) \longmapsto \vec{r} = f(\lambda)\vec{u} + g(\lambda)\vec{k}$$



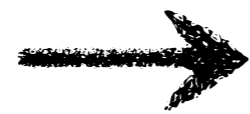
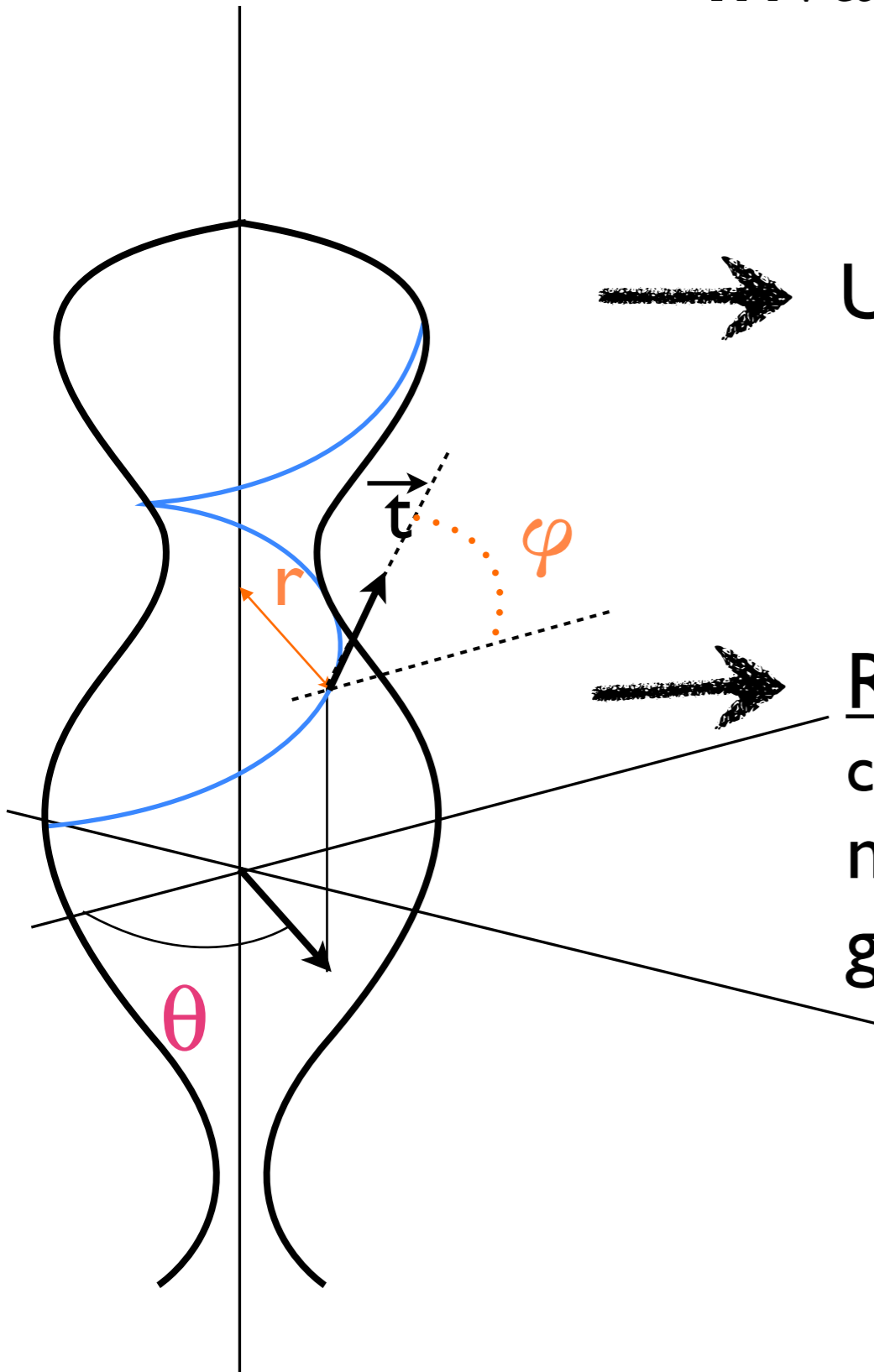
Équations des géodésiques:

$$\begin{aligned} \theta'' + 2\lambda'\theta'\frac{f'}{f} &= 0 \\ \lambda'' + \lambda'^2\frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2} - \theta'^2\frac{ff'}{f'^2 + g'^2} &= 0 \end{aligned}$$



Existence et unicité de la solution au problème de Cauchy

Invariant de Clairaut



Une géodésique vérifie:

$$r \cos(\varphi) = \text{cste}$$



Réciproquement: si γ ne coïncide pas avec un méridien, c'est une géodésique.

Implémentation

Principe:

$$\longrightarrow (\theta, \lambda); \varphi \longrightarrow \vec{t} = \sin(\varphi)\vec{e}_\lambda + \cos(\varphi)\vec{e}_\theta$$

$$\longrightarrow \theta := \text{angle}(\vec{u}_x, A + h.\vec{t})$$

$$\lambda := g^{-1}[(A + h.\vec{t}).\vec{u}_z]$$

$$\varphi := \arccos(c/f(\lambda))$$

$$\vec{e}_\lambda = \vec{r}_\lambda / \|\vec{r}_\lambda\|$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{r}_\theta / \|\vec{r}_\theta\|$$

Implémentation

```
geod4 := proc(u0, v0, theta0, f, g, h, n) local u, v, c, V, a, b, A, i, theta1, theta2, t, redr :  
  V := NULL :  
  V := [u0, v0], V :  
  u := u0 :  
  v := v0 :  
  theta1 := theta0 :  
  theta2 := theta0 :  
  c := f(v)cos(theta0) :  
  t := <0., 0, 0> :  
  A := <0., 0, 0> :  
  redr := false :  
  for i from 1 to n do  
    A := <f(v)·cos(u), f(v)·sin(u), g(v)> :  
    t := cos(theta2)·<-sin(u), cos(u), 0> +  $\frac{\sin(\theta_2)}{\text{sqrt}(f'(v)^2 + g'(v)^2)} \cdot (f'(v) \cdot \langle \cos(u), \sin(u), 0 \rangle + g'(v) \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle)$  :  
    u := angleu(A + h·t) :  
    v := Re(evalf(fsolve(g(x) = (DotProduct((A + h·t), <0, 0, 1.>)))))) :  
    theta2 := evalf((cos-1)( $\frac{c}{f(v)}$ )) :  
    if theta1 < 0 then theta2 := -theta2 : fi :  
    if redr then theta2 := -theta2 : fi :  
    if Im(theta2) ≠ 0 then theta2 := -theta1 : theta1 := -theta1 : redr := not redr :  
    else theta1 := theta2 : fi :  
    V := [u, v], V :  
  od :  
  [V] :  
end :
```

Résultats

Ellipsoïde



Cylindre

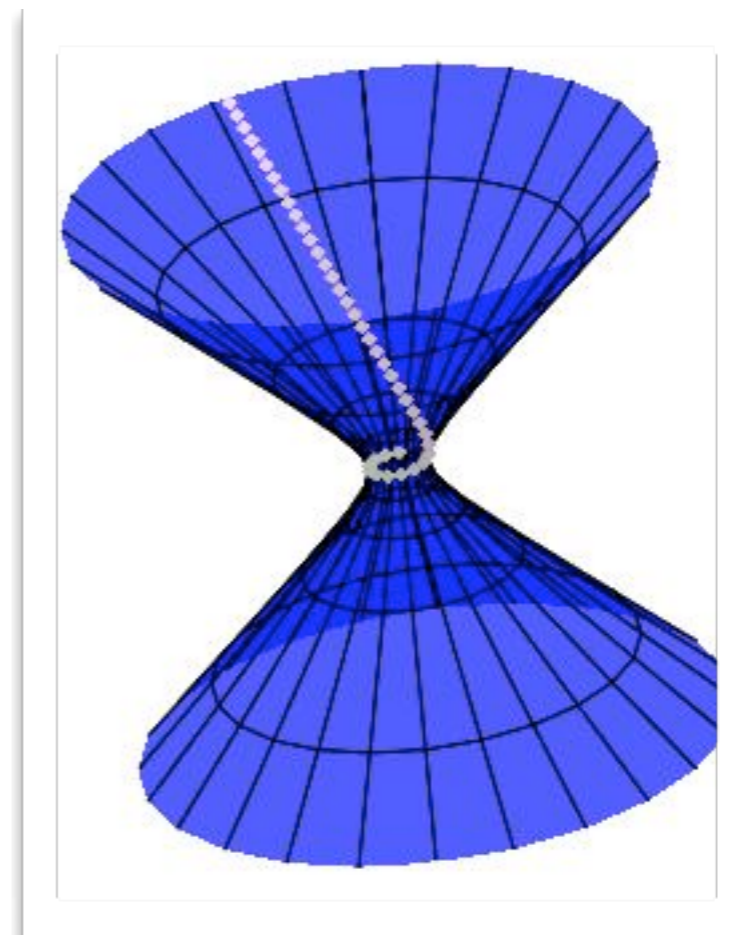


Résultats

Cône de révolution

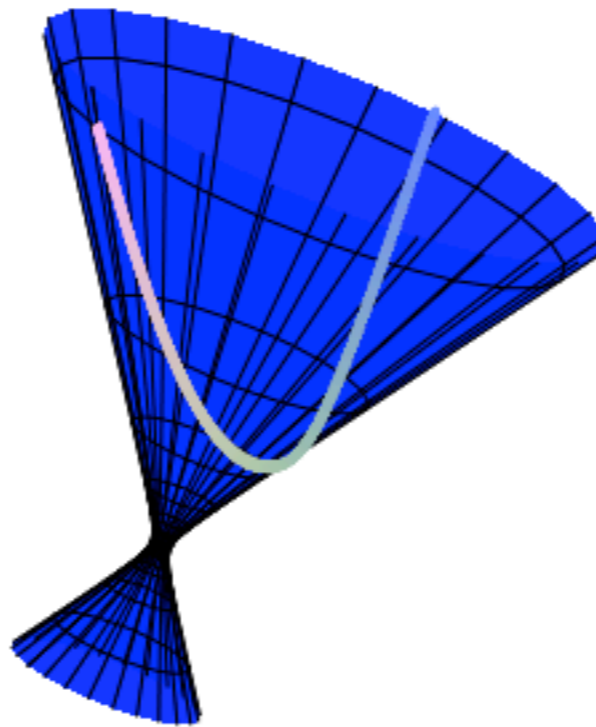


Hyperboloïde à
une nappe



Hyperboloïde à une nappe

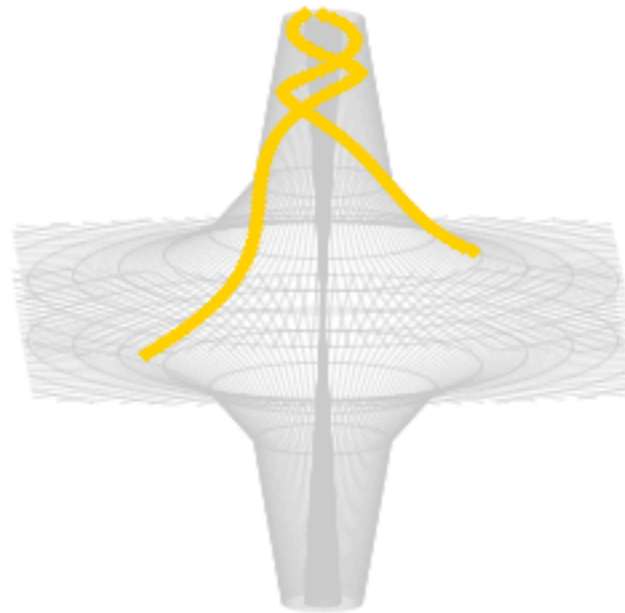
```
A1 := PLOT3D( POINTS( coord( cosh, sinh, geod4( 0., 4., evalf( -4*Pi/10 ), cosh, sinh, 0.5, 200 ) ) ), SYMBOL(DIAMOND) ):  
B := plot3d( [ cosh(v)*cos(u), cosh(v)*sin(u), sinh(v) ], u = 0 .. 2*Pi, v = -8 .. 8, color = blue ):  
  
display( {A1, B}, view = [ -30 .. 30, -30 .. 30, -10 .. 30 ] );
```



Trompette de Gabriel

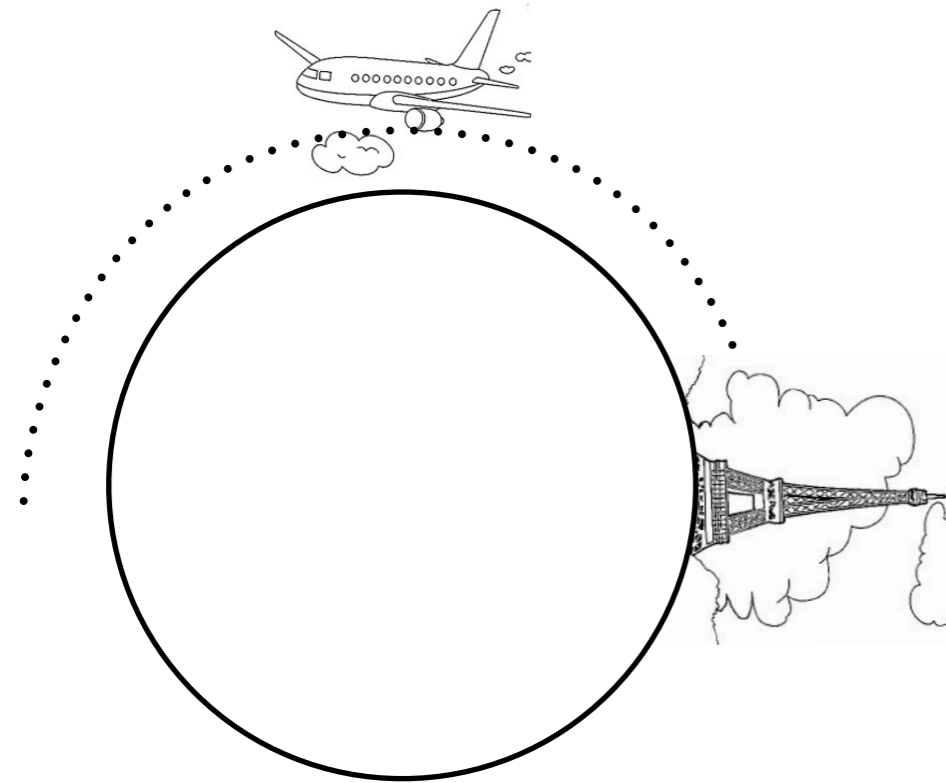
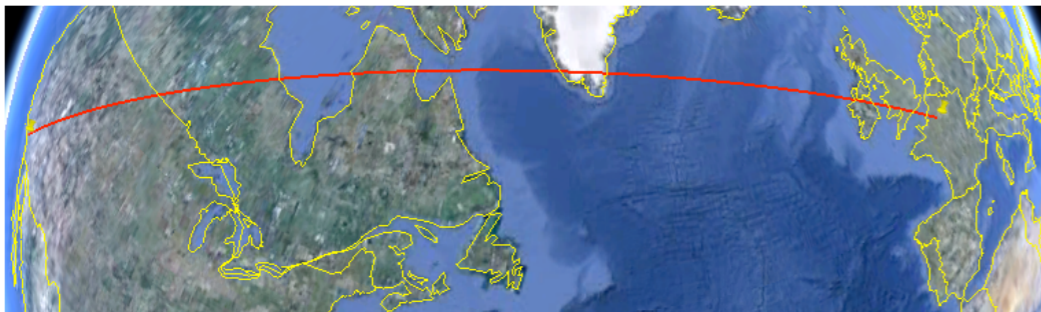
```
F2 := t → t :  
G2 := t → 1/t :  
A := PLOT3D( POINTS( coord( F2, G2, geod4( 0, 1, evalf( -9·Pi/20 ), F2, G2, 0.1, 300 ) ) ) ), SYMBOL( DIAMOND ) ) :  
B := plot3d( [ v·cos(u), v·sin(u), 1/v ], u = 0 .. 2·Pi, color = grey, v = -15 .. 15, grid = [ 100, 100 ] );  
display( { A, B }, view = [ -2 .. 2, -2 .. 2, -5 .. 5 ] );
```

PLOT3D(...)



Vol en avion

Pourquoi le vol Paris-Los Angeles survole-t-il le Groenland ?



Les avions empruntent les **géodésiques** de la sphère: les **grands cercles**.