

Programmieren II für Studierende der Mathematik

Aufgabe 3

Erstellen Sie ein Programm, das zu einer Funktion $f \in C[-1, 1]$ die diskrete Tschebyscheff-Entwicklung

$$\sum_{k=0}^n c_k T_k, \quad T_k(x) = \cos(k \arccos x)$$

mit

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f\left(\cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right)\right) \\ c_k &= \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n f\left(\cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}\pi\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{2j+1}{2(n+1)}k\pi\right) \quad (k = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

berechnet. Die Auswertung dieser Entwicklung an einer Stelle $x \in [-1, 1]$ soll über die folgende Rekursionsformel erfolgen:

$$\begin{aligned} s_0 &= c_n \\ s_1 &= c_n \cdot x + c_{n-1} \\ s_k &= 2 \cdot x \cdot s_{k-1} - s_{k-2} - c_{n-k+1} \cdot x + c_{n-k} \quad (k = 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Geben Sie jeweils k und c_k aus, sofern $|c_k| \geq \varepsilon$, und zusätzlich den maximalen Betrag der Differenz zwischen f und $\sum_{k=0}^n c_k T_k$ an den $N+1$ Stützstellen $x_i = -1 + ih$ ($i = 0, \dots, N$) mit $h = 2/N$.

Rechnen Sie mit $\varepsilon = 10^{-12}$ und $N = 2000$ folgende Beispiele:

- (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$, $n = 3$ (b) $f(x) = 2 + x \cos x$, $n = 30$
(c) $f(x) = e^{-4x^2} \sin 4x$, $n = 50$

Bearbeitungszeitraum: bis Donnerstag, 24.11.2022, 16⁰⁰