MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann, G. Kleen

WS 2022/2023

Programmieren II für Studierende der Mathematik

Aufgabe 11

Zur numerischen Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung der Gestalt

$$\begin{aligned}\mathbf{y}''(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \quad (t \in [t_0, T]),\\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0,\\ \mathbf{y}'(t_0) &= \mathbf{y}_0'\end{aligned}$$

mit vorgegebenen Anfangswerten $\mathbf{y_0}, \mathbf{y_0}' \in \mathbb{R}^n$ und rechter Seite $\mathbf{f} : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und gesuchter Funktion $\mathbf{y} : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ kann ein Nyström–Verfahren 4. Ordnung eingesetzt werden. Ein Verfahrensschritt mit Schrittweite h_i ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_i^{(1)} &= \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i)\\ \mathbf{k}_i^{(2)} &= \mathbf{f}(t_i + \frac{h_i}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h_i}{2}\mathbf{y_i}' + \frac{h_i^2}{8}\mathbf{k}_i^{(1)})\\ \mathbf{k}_i^{(3)} &= \mathbf{f}(t_i + h_i, \mathbf{y}_i + h_i\mathbf{y_i}' + \frac{h_i^2}{2}\mathbf{k}_i^{(2)})\\ \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + h_i\mathbf{y}_i' + \frac{h_i^2}{6}(\mathbf{k}_i^{(1)} + 2\mathbf{k}_i^{(2)})\\ \mathbf{y}_{i+1}' &= \mathbf{y}_i' + \frac{h_i}{6}(\mathbf{k}_i^{(1)} + 4\mathbf{k}_i^{(2)} + \mathbf{k}_i^{(3)}).\end{aligned}$$

Programmieren Sie dieses Verfahren (ohne Schrittweitensteuerung) und testen Sie es an

(a) $$\begin{aligned} y_1'' &= -5y_1 + 4y_2, & y_1(0) &= 0, & y_1'(0) &= 2, & T &= 6\pi, & h &= \frac{\pi}{500}\\ y_2'' &= 4y_1 - 5y_2, & y_2(0) &= 0, & y_2'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Es sollen für die ersten und letzten 10 Schritte $\mathbf{y}_i$ und $\mathbf{y}_i'$ ausgedruckt werden.

(b) $$\ddot{\vec{r}}_i = -k^2(1 + \frac{m_i}{m_0})\frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} + k^2 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{9} \frac{m_j}{m_0}(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} - \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3}) \qquad (i = 1, \ldots, 9)$$

Dieses Differentialgleichungssystem beschreibt die Bewegung der 9 Planeten des Sonnensystems in heliozentrischen kartesischen Koordinaten, wobei lediglich die Anziehungskraft der Sonne und die gegenseitige Anziehung berücksichtigt ist. m_0 ist hierin die Sonnenmasse, $m_1, \ldots, m_9$ die Massen der Planeten (Erde: Masse von Erde + Masse des Mondes), $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_9$ die Ortsvektoren der Planeten–Schwerpunkte (Erde: Schwerpunkt des Erde/Mondsystems) und k die Gaußsche Gravitationskonstante ($k^2 = \gamma m_0$). Die Anfangswerte zum Zeitpunkt t_0 (1.1.1997, 0^h Weltzeit) in heliozentrischen kartesischen Äquatorialkoordinaten zur Epoche 2000 und die Massenverhältnisse $\frac{m_0}{m_i}$ zum Zeitpunkt t_0 (1.1.1997, 0^h Weltzeit) finden Sie auf der Vorlesungshomepage. Die Länge wird dabei in AE ($= 1.4959787066 \cdot 10^{11}\,$m), die Masse in Sonnenmassen und die Zeit in Tagen (= 86400s) gemessen. Die Gaußsche Konstante k beträgt 0.01720209895.

Geben Sie die mit Schrittweite 1 Tag berechneten Positionen und Geschwindigkeiten der Planeten 200 Tage und 520 Tage nach bzw. 360 Tage vor dem Zeitpunkt t_0 aus.

Versuchen Sie bei Programmierung, das Lösungsverfahren mit der Ausgabe, den Nyströmschritt und die Daten voneinander getrennt zu halten.

Bearbeitungszeitraum: bis Donnerstag, 2.2.2023, 16^{00}