MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann, G. Kleen

WS 2022/2023

Programmieren II für Studierende der Mathematik

Aufgabe 10

Das zyklische Jacobi-Verfahren dient zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix $A= (a_{ij})_{i,j=0,\ldots,n-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Dazu wird die Matrix A sukzessive den Transformationen $Q^\top AQ$ unterworfen, worin $Q := Q^{ij}$ $(i < j)$ eine Matrix bezeichnet, die sich von der Einheitsmatrix nur in den folgenden 4 Einträgen unterscheidet:

$$\begin{aligned} q_{ii} &= \quad q_{jj} = c, \\ q_{ij} &= -q_{ji} = s. \end{aligned}$$

c und s erfüllen $c^2 + s^2 = 1$ und werden für $a_{ij}^{alt} \neq 0$ so gewählt, daß $a_{ij}^{neu} = 0$, $c > 0$, und $s \in (-c, c]$ gilt. Wenn bereits $a_{ij}^{alt} = 0$ erfüllt ist, setzt man $c = 1$ und $s = 0$. Der Ansatz $c = st$ führt dann nach einigen elementaren Umformungen zu

$$\tau = \frac{a_{jj}^{alt} - a_{ii}^{alt}}{2a_{ij}^{alt}}, \qquad t = \frac{\operatorname{sign}(\tau)}{|\tau| + \sqrt{1+\tau^2}} \quad \text{mit} \quad \operatorname{sign}(\tau) = \begin{cases} 1 & : \quad \tau \geq 0 \\ -1 & : \quad \tau < 0 \end{cases},$$
$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad s = ct$$

Dabei werden nur die i-te und j-te Zeile und Spalte von A^{alt} verändert. Bezeichnet man die k-te Zeile bzw. k-te Spalte einer Matrix M mit m^k bzw. m_k, so ergibt sich mit $A' := A^{alt}Q$ und $A^{neu} = Q^\top A'$

$$\begin{aligned} a'_i &= ca_i^{alt} - sa_j^{alt} \\ a'_j &= sa_i^{alt} + ca_j^{alt} \\ (a^{neu})^i &= c(a')^i - s(a')^j \\ (a^{neu})^j &= s(a')^i + c(a')^j \end{aligned}$$

Ebenso kann der Update des Produkts U aller bisher angewendeten Matrizen Q über $U^{neu}{=}U^{alt}Q$ erfolgen:

$$\begin{aligned} u_i^{neu} &= cu_i^{alt} - su_j^{alt} \\ u_j^{neu} &= su_i^{alt} + cu_j^{alt} \end{aligned}$$

Die Summe der Betragsquadrate der Nichtdiagonalelemente, die im Abbruchkriterium benötigt wird, kann folgendermaßen berechnet werden:

$$N(\mathbf{A}^{neu}) = N(\mathbf{A}^{alt}) - 2|a_{ij}^{alt}|^2$$

In einem Zyklus werden zeilenweise nacheinander die Indexpaare (i, j) der oberen Hälfte von A durchlaufen (d.h. $j = i + 1,\dots,n - 1$ für $i = 0,\dots,n - 1$).

Die Berechnung soll abgebrochen werden, wenn $N(\mathbf{A}^{neu}) := 2\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1}|a_{ij}^{neu}|^2 \leq \varepsilon \cdot N(\mathbf{A})$ nach einem Zyklus gilt oder eine vorgebenene Zahl *maxzykl* von Zyklen überschritten ist.

Die Näherungen für die Eigenwerte stehen in der Diagonale von A^{neu}, die Näherungen für die Eigenvektoren ergeben sich aus den Spalten der Matrix U, die das Produkts aller bisher angewendeten Matrizen Q ist.

Erstellen Sie eine Funktion `jacobi`, die das zyklische Jacobi-Verfahren implementiert. Ihr Rückgabewert soll über den Erfolg des Verfahrens Auskunft geben. A, ε und *maxzykl* sollen über Eingabeparameter, die berechneten Eigenwerte als Vektor und die Eigenvektoren als Matrix über Ausgabeparameter übergeben werden.

Die Matrizen sollen einer eigens definierten Klasse `Matrix` angehören, der der Datentyp `valarray<double>` zugrunde liegt, und die Vektoroperationen für Matrixzeilen bzw. -spalten zulässt. (Ergänzen Sie z.B. den in der Vorlesung vorgestellten Matrixtyp mit selbstdefinierten Slicearray-Varianten entsprechend.)

Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren möglichst nicht in der Funktion, sondern im Hauptprogramm aus.

Rechnen Sie folgende Beispiele:

(a) $$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) $$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & -3 & 8 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 5 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -6 & 1 & 6 & -3 \\ 5 & 6 & 0 & -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Bearbeitungszeitraum: bis Donnerstag, 26.1.2023, 16^{00}