MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann, G. Kleen

SS 2023

Programmieren I für Studierende der Mathematik

Aufgabe 7

Eine symmetrische, positiv definite Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist darstellbar als Produkt $A = LL^T$, wobei $L = (l_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ eine untere Dreiecksmatrix mit positiven Hauptdiagonalelementen ist (Cholesky-Zerlegung). L kann spaltenweise mit folgenden Formeln berechnet werden.

$$\left.\begin{array}{ll} l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum\limits_{k=0}^{j-1} l_{jk}^2} & \\ l_{ij} = \dfrac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum\limits_{k=0}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) & i = j+1, \dots, n-1 \end{array}\right\} \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ kann dann bei gegebenem $b = (b_i)_{i=0,\dots,n-1} \in \mathbb{R}^n$ und gesuchtem $x = (x_i)_{i=0,\dots,n-1} \in \mathbb{R}^n$ durch Lösen von $Ly = b$ und $L^T x = y$ aufgelöst werden, was zu den Formeln

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=0}^{i-1} l_{ik} y_k \right) \qquad i = 0, \dots, n-1$$

$$x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n-1} l_{ki} x_k \right) \qquad i = n-1, \dots, 0.$$

führt. Das Programm soll mit einer Fehlermeldung abgebrochen werden, wenn der Radikant bei der Berechnung von l_{jj} kleiner oder gleich 0 oder kleiner als $\varepsilon \cdot \mathrm{Spur}(A)$ ist ($\mathrm{Spur}(A) := \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_{jj}$).

Erstellen Sie eine Funktion `cholesky`, die die Matrixgleichung $Ax = b$ auf diese Weise löst und im Erfolgsfall den Vektor x als Ergebnis liefert. Der Funktion sollen lediglich die Größen A, b und ε als Argumente übergeben werden.

Das Einlesen von n, A und b (mit Kontrollausgabe!) und die Ausgabe von x soll im Hauptprogramm erfolgen.

Rechnen Sie folgende Beispiele (mit $\varepsilon = 10^{-10}$)

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -21 \\ -73 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 25 & 20 \\ 0 & 0 & 20 & 61 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 158 \\ 304 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & 1 \\ 4 & -3 & -5 & 1 & 15 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Bearbeitungszeitraum: bis Freitag, 23.6.2023, 12^{00}