

Programmieren I für Studierende der Mathematik

Aufgabe 4

Aus der Gleichung $\ln(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ ergibt sich durch Wahl der Folge $h_n = \frac{1}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$\ln(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\sqrt[2^n]{a} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{a - 1}{\prod_{k=1}^n (1 + \sqrt[2^k]{a})} \quad (\text{falls } a > 0)$$

und damit Verfahren, mit denen der natürliche Logarithmus durch wiederholtes Ziehen der Quadratwurzel berechnet werden kann. Die zweite Gleichung – sie vermeidet das numerische Problem der Auslöschung – folgt aus der Umformung $x^{2^n} - 1 = (x - 1) \prod_{k=0}^{n-1} (x^{2^k} + 1)$ mit $x = \sqrt[2^n]{a}$.

- (a) Geben Sie im Fall $a > 0$ für beide Verfahren die Folge der Näherungen an $\ln(a)$ in einer Tabelle aus und zum Vergleich auch den mit der Standardfunktion berechneten Wert von $\ln(a)$. Brechen Sie die Berechnung ab, wenn $|\sqrt[2^n]{a} - 1| \leq \varepsilon$, wobei ε in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit des verwendeten Gleitpunkttyps liegen soll.

Die Berechnung von $\sqrt[2^k]{a}$ soll *nicht* mit Hilfe der Funktionen `pow` bzw. `exp` und `log` erfolgen, sondern durch wiederholtes Wurzelziehen. Entsprechendes gilt für die Auswertung von 2^n , hier kann (aber muss nicht) die Funktion `ldexp` zum Einsatz kommen.

- (b) Erstellen Sie eine Funktion `mylog` mit einem Parameter a , die für $a > 0$ den Logarithmus mit Hilfe der zweiten Gleichung berechnet. Für $a = 0$ soll der Funktionswert $-\infty$ und für $a < 0$ NaN („not a number“) zurückgegeben werden. Zusätzlich soll für $a = 0$ ein Wertebereichsfehler und für $a < 0$ ein Definitionsbereichsfehler mittels des `errno`-Mechanismus gesetzt werden. Geben Sie im Hauptprogramm zusätzlich und durch eine Leerzeile von den Ergebnissen von (a) getrennt, jeweils a , den Wert der Standardfunktion $\ln a$ bzw. `mylog(a)` und die entsprechende Fehlermeldung aus, sofern ein Fehler mittels des `errno`-Mechanismus gesetzt wird.

(Hinweis: `numeric_limits<double>::quiet_NaN()` liefert NaN.)

Verwenden sie für alle auszugebenden Größen ein Exponentialformat mit 15 Nachkommastellen und achten Sie auf tabellarische Ausgabe.

Rechnen Sie folgende Beispiele:

- | | | | | | | | |
|-----|---|------|---------|-------|------------|--------|------------|
| (i) | 2 | (ii) | 0.36789 | (iii) | 1000000000 | (iv) | 0.99999999 |
| (v) | 1 | (vi) | 0.0 | (vii) | -0.0 | (viii) | -1 |

Bearbeitungszeitraum: bis Freitag, 2.6.2023, 12⁰⁰