MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann, G. Kleen

SS 2023

Programmieren I für Studierende der Mathematik

Aufgabe 3

(a) Der Umfang U einer Ellipse mit den Halbachsen $a_0 \geq b_0 > 0$ kann durch die folgende Variante des Verfahrens zur Bestimmung des arithmetisch-geometrischen Mittels bestimmt werden:

Die durch

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

rekursiv definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert („arithmetisch-geometrisches Mittel von a_0 und b_0“) und es gilt

$$U = \frac{2\pi\Big(a_0^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2)\Big)}{\lim_{n\to\infty} a_n}.$$

Programmieren Sie dieses Verfahren. Brechen Sie dabei die Berechnung der unendlichen Reihe und des Grenzwerts ab, wenn $2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2) < \varepsilon \cdot a_0^2$ gilt (ε: Maschinengenauigkeit). Berechnen Sie zur Vermeidung der Auslöschung die Größe $c_n = a_n^2 - b_n^2$ über die Rekursion $c_n = \dfrac{c_{n-1}^2}{16a_n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(b) Programmieren Sie zum Vergleich die langsamer konvergierende Potenzreihenmethode zur Bestimmung des Ellipsenumfangs

$$U = 2\pi a_0 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{e^2}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \ldots\right) \quad \text{mit } e = \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}}$$

Leiten Sie dazu geeignete Rekursionsbeziehungen her (bitte gesondert aufschreiben oder als Kommentar in das Programm schreiben!) und brechen Sie mit einem sinnvollen Abbruchkriterium die Berechnung der Potenzreihe ab.

Formulieren Sie beide Verfahren als Funktionen. Lesen Sie a_0, b_0 im Hauptprogramm ein und berechnen Sie den Ellipsenumfang mit beiden Funktionen. Geben Sie a_0, b_0 im Festpunktformat mit 4 Nachkommastellen und die berechneten Umfangswerte jeweils im Exponentialformat mit 15 Nachkommastellen aus.

Rechnen Sie neben zwei eigenen Testbeispielen auch die Beispiele
$a_0 = 2 \quad b_0 = 2$,
$a_0 = 5 \quad b_0 = 3$,
$a_0 = 10 \quad b_0 = 9.99999$.

Bearbeitungszeitraum: bis Freitag, 26.5.2023, 12^{00}