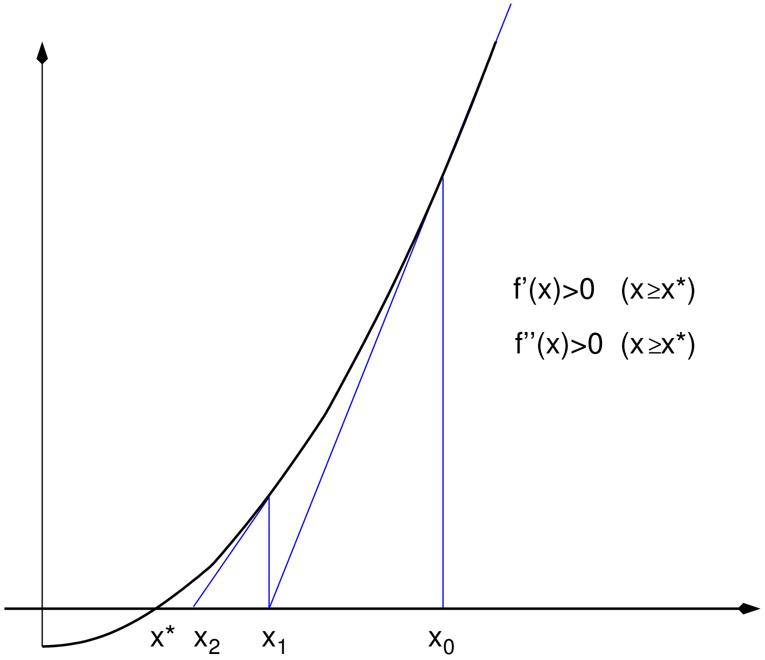
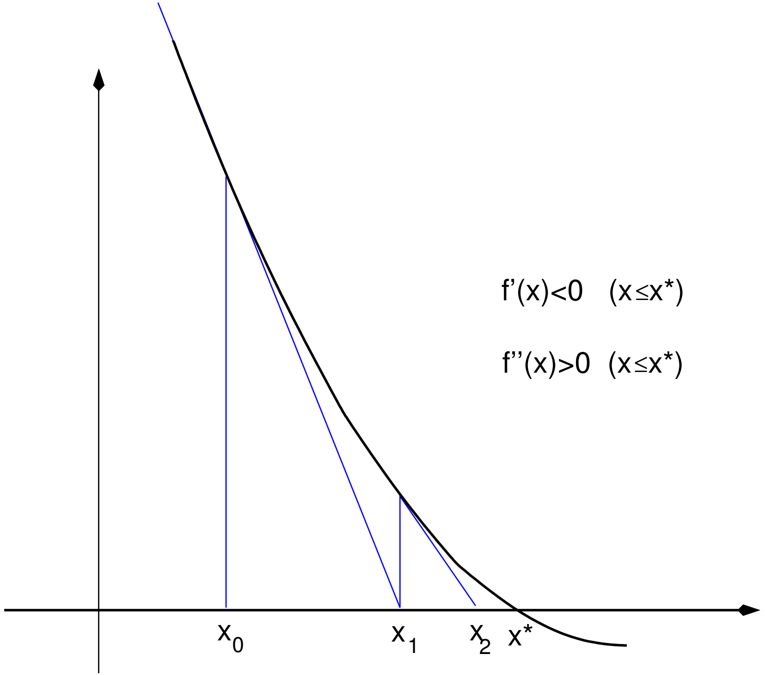
Divisionsfreies Quadratwurzelziehen

Newtonverfahren

- Rekursionsvorschrift: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$
- Quadratische Konvergenz gegen Nullstelle x^* von f, falls f zweimal stetig differenzierbar, $f'(x^*) \neq 0$ und Startwert x_0 genügend nahe an x^*.
- Falls f konvex ($f'' > 0$), $f'(x^*) > 0$, $f(x_0) > 0$ und $x^* < x_0$ monotone fallende Konvergenz gegen x^*.
- Falls f konvex ($f'' > 0$), $f'(x^*) < 0$, $f(x_0) > 0$ und $x_0 < x^*$ monotone wachsende Konvergenz gegen x^*.
- $f(x) = x^\alpha - a \ (x > 0)$ mit festem $a > 0$, $\alpha \neq 0$
  $x_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) x_k + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a}{x_k^{\alpha-1}} \ (k \in \mathbb{N}_0)$
  $\alpha = 2$: $\quad x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \quad \to \quad \sqrt{a}$
  $\alpha = -2$: $\quad x_{k+1} = \frac{3}{2}x_k - \frac{1}{2}a x_k^3 \quad \to \quad \frac{1}{\sqrt{a}}$


f'(x)>0 (x≥x*)
f''(x)>0 (x≥x*)
x*
x2
x1
x0



$f'(x)<0 \quad (x \le x^*)$
$f''(x)>0 \quad (x \le x^*)$
x_0
x_1
x_2
x^*

Hinweise zur Programmierung

Zerlegung in Viererpotenz und Mantisse

Sei $a \neq 0$. Gesucht $b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$, so dass

$$a = b \cdot 4^n \ \text{ mit } \ \tfrac{1}{4} \leq |b| < 1 \text{ und } n \in \mathbb{Z}$$

Die Funktion `frexp` liefert:

$$a = c \cdot 2^m \ \text{ mit } \ \tfrac{1}{2} \leq |c| < 1 \text{ und } m \in \mathbb{Z}$$

1. Fall m gerade $\quad a = c \cdot 2^m$

$$\Longrightarrow \quad b = c,\ n = \tfrac{m}{2}$$

2. Fall m ungerade $\quad a = c \cdot 2^m = \frac{c}{2} \cdot 2^{m+1}$

$$\Longrightarrow \quad b = \tfrac{c}{2},\ n = \tfrac{m+1}{2}$$