Logarithmus durch wiederholtes Quadratwurzelziehen

Sei $a > 0$. Wegen

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

folgt

$$\ln a = \frac{d}{dx} a^x \Big|_{x=0} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - a^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Mit der Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $h_n = \frac{1}{2^n}$ ergibt sich

$$\ln a = \lim_{n \to \infty} \frac{a^{\frac{1}{2^n}} - 1}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \to \infty} 2^n \left(\sqrt[2^n]{a} - 1 \right)$$

Bemerkung: $\sqrt[2^n]{a} = \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots \sqrt{a}}}}_{n-mal}$

Problem: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{a} = 1 \quad \Rightarrow \quad$ Auslöschung!

Vermeiden der Auslöschung

$$
\begin{aligned}
\sqrt[2^n]{a} - 1 &= \frac{(\sqrt[2^n]{a} - 1)(\sqrt[2^n]{a} + 1)}{\sqrt[2^n]{a} + 1} = \frac{\sqrt[2^{n-1}]{a} - 1}{\sqrt[2^n]{a} + 1} \\
&= \frac{(\sqrt[2^{n-1}]{a} - 1)(\sqrt[2^{n-1}]{a} + 1)}{(\sqrt[2^n]{a} + 1)(\sqrt[2^{n-1}]{a} + 1)} = \frac{\sqrt[2^{n-2}]{a} - 1}{(\sqrt[2^n]{a} + 1)(\sqrt[2^{n-1}]{a} + 1)} \\
&= \ldots = \frac{a - 1}{(\sqrt[2^n]{a} + 1)(\sqrt[2^{n-1}]{a} + 1) \cdots (\sqrt{a} + 1)} \\
&= \frac{a - 1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[2^k]{a} + 1 \right)}
\end{aligned}
$$

Insgesamt:

$$
\ln a = \lim_{n \to \infty} 2^n \frac{a - 1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[2^k]{a} + 1 \right)}
$$

Hinweise zur Programmierung

Verfahren

$$x_n := 2^n \left(\sqrt[2^n]{a} - 1 \right), \quad y_n := 2^n \frac{a-1}{\prod\limits_{k=1}^{n} (1+ \sqrt[2^k]{a})} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Zwischenschritt

$$z_n := 2^n, \quad w_n := \sqrt[2^n]{a}, \quad p_n := \prod_{k=1}^{n} (1 + w_k)$$

$$x_n = z_n(w_n - 1), \quad y_n = \frac{z_n(a-1)}{p_n}$$

Rekursionsvorschrift

$$z_1 = 2, \quad w_1 = \sqrt{a}, \quad p_1 = 1 + w_1$$

$$\left.\begin{array}{l} x_n = z_n(w_n - 1), \quad y_n = \frac{z_n(a-1)}{p_n}, \quad x_n,\ y_n \text{ drucken} \\ z_{n+1} = 2z_n, \quad w_{n+1} = \sqrt{w_n}, \quad p_{n+1} = p_n(1 + w_{n+1}) \end{array}\right\} (n \in \mathbb{N})$$

Pseudocode

$z = 2, \quad w = \sqrt{a}, \quad p = 1 + w$

do $\{$

  $x = z(w - 1), \quad y = \frac{z(a-1)}{p}, \quad x,y$ drucken

  $z = 2z, \quad w = \sqrt{w}, \quad p = p(1 + w)$

$\}$ while $(|w - 1| > \varepsilon)$; // auch korrekt für $a = 1$