π-Iteration (Einheitskreisfläche)

Pseudocode (Auszug)

$s_2 = \sqrt{2}$, $n = 2$

while($\frac{s_n^2}{4} \geq \varepsilon$) {

$A_n = 2^{n-1} s_n \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}$

Drucke n, A_n und Zeilenvorschub

$s_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$

n um 1 erhöhen

}

Programm-Fragment

```
s=sqrt(2); n=2;
while(s*s/4.0 >= eps) {
   a=ldexp(1.0,n-1)*s*sqrt(1-s*s/4.0);
   cout << n << " " << a << endl;
   s=sqrt(2-sqrt(4-s*s));
   n=n+1;
}
```

Auslöschung

- Situation: Gleitpunktzahlen zur Basis B (B gerade) mit fester Mantissenlänge t
- Rundung zur nächsten Gleitpunktzahl:

$$\left|\frac{x - rd\,x}{x}\right| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{B^{t-1}} =: \epsilon \quad \text{„Maschinengenauigkeit“}$$

  (falls $rd\,x$ normalisierte Maschinenzahl)
- IEEE-Arithmetik ($B = 2$, round to even):
  `numeric_limits<float> ::epsilon()` $= 2\epsilon_{float}$
  `numeric_limits<double>::epsilon()` $= 2\epsilon_{double}$
- Gleitpunktzahlen sind bereits durch die Rundung mit einem relativen Fehler behaftet, der allerdings in einem weiten Zahlbereich unabhängig von x beschränkt ist.
- Deshalb Studium der Fortpflanzung *relativer* Fehler in arithmetischen Operationen!

Fortpflanzung relativer Fehler

$x \neq 0$, $\quad \bar{x}$ Näherung an x,

$\varepsilon_x := \dfrac{\bar{x} - x}{x}$ “relativer Fehler von $\bar{x}$“

Umformung: $\quad \bar{x} = (1 + \varepsilon_x)x$

Addition/Subtraktion $\quad x, y, x \pm y \neq 0$

$$\varepsilon_{x \pm y} = \frac{\bar{x} \pm \bar{y} - (x \pm y)}{x \pm y} = \frac{(1 + \varepsilon_x)x \pm (1 + \varepsilon_y)y - (x \pm y)}{x \pm y}$$

$$= \frac{x}{x \pm y}\varepsilon_x \pm \frac{y}{x \pm y}\varepsilon_y$$

Multiplikation $\quad x, y \neq 0$

$$\varepsilon_{x \cdot y} = \frac{\bar{x}\bar{y} - xy}{xy} = \frac{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)xy - xy}{xy} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_y$$

Fortpflanzung relativer Fehler II

Division $x, y, \bar{y} \neq 0$

$$\varepsilon_{x/y} = \frac{\bar{x}/\bar{y} - x/y}{x/y} = \frac{1+\varepsilon_x}{1+\varepsilon_y} - 1 = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{1+\varepsilon_y}$$

- Starke Verstärkung des relativen Fehlers bei der Subtraktion, falls $x \approx y$
- “Auslöschung“, weil korrekte Ziffern sich gegeneinander wegheben und fehlerbehaftete Ziffern nach vorne rücken
- Oft verstecktes Auftreten der Auslöschung, z.B. in
  $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ für großes $|x|$ (Aufgabe 1)
  $s_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ falls s_n klein (Aufgabe 2)