Ellipsenumfang (Potenzreihenentwicklung)

Sei $a_0 \geq b_0 > 0$. (a_0 große Halbachse, b_0 kleine Halbachse)

Ellipsengleichung: $\dfrac{x^2}{a_0^2} + \dfrac{y^2}{b_0^2} = 1$

Parameterdarst.: $(x(\varphi), y(\varphi)) = (a_0 \cos\varphi, b_0 \sin\varphi) \quad (\varphi \in [0, 2\pi])$

Ellipsenumfang:

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a_0^2 \sin^2\varphi + b_0^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_0^2 \sin^2\varphi + b_0^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi \quad \text{(Symmetrie)}$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_0^2 \cos^2\varphi + b_0^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi \quad \text{(Subst. } \varphi \to \tfrac{\pi}{2} - \varphi\text{)}$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_0^2 + (b_0^2 - a_0^2) \sin^2\varphi}\, d\varphi \quad (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1)$$

$$= 4a_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}\right) \sin^2\varphi}\, d\varphi \quad \text{Num. Exz. } e := \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}}$$

Ellipsenumfang II (Potenzreihenentwickl.)

$$= 4a_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

$$= 4a_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \binom{\frac{1}{2}}{1} e^2 \sin^2 \varphi + \binom{\frac{1}{2}}{2} e^4 \sin^4 \varphi - \binom{\frac{1}{2}}{3} e^6 \sin^6 \varphi + ..\right) d\varphi$$

$$= 4a_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{e^2}{1} \sin^2 \varphi - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{e^4}{3} \sin^4 \varphi - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{e^6}{5} \sin^6 \varphi - \dots\right) d\varphi$$

$$= 2\pi a_0 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{e^2}{1} - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots\right)$$

Im letzten Schritt wurde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2k} \varphi\, d\varphi = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2k(2k-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{N})$$

benutzt.