Ellipsenumfang durch arithm.-geom. Mittel

$$U = \frac{2\pi\left(a_0^2 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2)\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$$ wird angenähert durch

$$U_n = \frac{2\pi\left(a_0^2 - \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{k-1}(a_k^2 - b_k^2)\right)}{a_n}$$

Mit $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{k-1}(a_k^2 - b_k^2)$ ergibt sich $U_n = \frac{2\pi(a_0^2 - s_n)}{a_n}$,

$s_0 = 2^{-1}(a_0^2 - b_0^2),\ \ s_{n+1} = s_n + 2^n(a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2)\ \ (n \in \mathbb{N}_0)$

Rekursionen für a_n, b_n und $c_n := a_n^2 - b_n^2$ liefern

$c_0 = a_0^2 - b_0^2,\ \ s_0 = 0.5c_0$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ \ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \\ c_{n+1} = \frac{c_n^2}{16a_{n+1}^2},\ \ s_{n+1} = s_n + 2^n c_{n+1} \end{array}\right\}\ (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$U_n = \frac{2\pi(a_0^2 - s_n)}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Ellipsenumfang durch arithm.-geom. Mittel

Pseudocode

$c_0 = a_0^2 - b_0^2$, $n = 0$, $s_0 = 0.5c_0$

while($2^{n-1}c_n \geq \varepsilon a_0^2$) {

$\quad a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$,

$\quad c_{n+1} = \frac{c_n^2}{16a_{n+1}^2}$, $s_{n+1} = s_n + 2^n c_{n+1}$

$\quad$ n um 1 erhöhen

}

$U_n = \frac{2\pi(a_0^2 - s_n)}{a_n}$

Programm-Fragment

```
a=a0; b=b0; c=a*a-b*b; n=0; s=0.5*c;
while(ldexp(1.0,n-1)*c >= eps*a0*a0) {
   h=a; a=(a+b)/2.0; b=sqrt(h*b);
   c=c*c/(16.0*a*a); s=s+ldexp(1.0,n)*c;
   n=n+1;
}
u = 2*pi*(a0*a0-s)/a;
```