Arithm.-Geom. Mittel und Ellipsenumfang

Lemma 1 *Sei* $a_0 \geq b_0 > 0$*.*

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Dann gilt:

(i) $a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: M(a_0, b_0)$ *existiert.*

(iii) $c_n := a_n^2 - b_n^2 \ (n \in \mathbb{N}_0)$ *konvergiert quadratisch gegen* 0*, insbesondere gilt*

$$0 \leq c_{n+1} \leq \frac{c_n^2}{16 M(a_0, b_0)^2}$$

.

Beweis von Lemma 1:

(i) $a_0 \geq b_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 \geq \dfrac{a_0 + b_0}{2} \geq \sqrt{a_0 b_0} \geq b_0$ usw.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ klar (wegen Monotonie)

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}$$

daher $a_n - b_n \leq 2^{-n}(a_0 - b_0)$

(iii)
$$\begin{aligned} c_{n+1} = a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 &= \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - a_n b_n \\ &= \frac{a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2}{4} \\ &= \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_n^2 - b_n^2}{2(a_n + b_n)}\right)^2 = \left(\frac{c_n}{4a_{n+1}}\right)^2 \\ &= \frac{c_n^2}{16a_{n+1}^2} \leq \frac{c_n^2}{16M(a_0, b_0)^2}. \; \square \end{aligned}$$

Satz 1 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1 gilt:*

$$M(a_0, b_0) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\underbrace{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_0^2 \cos^2\varphi + b_0^2 \sin^2\varphi}}}_{I(a_0, b_0)}}$$

Beweis:

(1) Zeige: $I(a, b) = I(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) \ (a \geq b > 0)$

(2) Aus (1) folgt $I(a_0, b_0) = I(a_n, b_n) \ (n \in \mathbb{N}_0)$

Daher $I(a_0, b_0) = \lim\limits_{n\to\infty} I(a_n, b_n) =$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\underbrace{a_n^2}_{\to M(a_0,b_0)} \cos^2\varphi + \underbrace{b_n^2}_{\to M(a_0,b_0)} \sin^2\varphi}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{M(a_0,b_0)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{M(a_0,b_0)}.$$

$\square$

(1) Zeige: $I(a,b) = I(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) \quad (a \geq b > 0)$

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{a^2+b^2\tan^2\varphi}}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} \qquad \text{(Substitution: } t = b\tan\varphi\text{)}$$

$$I(\tfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{((\frac{a+b}{2})^2+t^2)(ab+t^2)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{ab}{s^2})ds}{\frac{\sqrt{(a^2+s^2)(b^2+s^2)}}{2s}\, s\frac{1}{2}(1+\frac{ab}{s^2})} \qquad \text{(Subst.: } t = \tfrac{1}{2}(s - \tfrac{ab}{s})\text{)}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+s^2)}} \quad = \quad I(a,b)$$

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1 gilt:*

$$J(a_0,b_0) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_0^2\cos^2\varphi + b_0^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\frac{a_0^2 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$$

Lemma 2. $2J(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}) - J(a,b) \ = \ ab\,I(a,b) \quad (a \geq b > 0)$

Beweis von Satz 2:

$$\begin{aligned} 2J(a_{n+1},b_{n+1}) - J(a_n,b_n) &= a_n b_n I(a_n,b_n), \\ \Rightarrow \quad 2^{n+1}J(a_{n+1},b_{n+1}) - 2^n J(a_n,b_n) &= 2^n a_n b_n I(a_n,b_n) \end{aligned}$$

Aufsumm. bringt hier nichts wegen $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n J(a_n,b_n) = \infty$.

Wir benutzen deshalb $\lim\limits_{n\to\infty} |2^n J(a_n,b_n) - 2^n a_n^2 I(a_n,b_n)| = 0$.

Umschreiben der 2. Gleichung mit $I(a_n,b_n) = I(a_0,b_0)$:

$$\begin{aligned} &[2^{n+1}J(a_{n+1},b_{n+1}) - 2^{n+1}a_{n+1}^2 I(a_{n+1},b_{n+1})] \\ &-[2^n J(a_n,b_n) - 2^n a_n^2 I(a_n,b_n)] \ = \ 2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2)I(a_0,b_0) \end{aligned}$$

Aufsummieren und Grenzübergang liefert

$$-(J(a_0,b_0) - a_0^2 I(a_0,b_0)) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2)I(a_0,b_0)$$

woraus sich die Aussage mit Hilfe von Satz 1 ergibt.

Bew. von Lemma 2. $\quad L(a,b) := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$.

(1) Zeige: $J(a,b) \;=\; b^2 I(a,b) + (a^2 - b^2)L(a,b)$

Folgt aus $\quad \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = \frac{b^2 + (a^2-b^2)\cos^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$.

(2) Zeige: $L(a,b) = b^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}\sqrt{b^2+t^2}^3}$ [Subst. $t = b\tan\varphi$.]

(3) Zeige: $L(a,b) + L(b,a) = I(a,b)$ $\quad$ [$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$].

(4) Zeige: $L(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}) = (a+b)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2\, ds}{\sqrt{(a^2+s^2)(b^2+s^2)}^3}$

Folgt aus (2) und der Substitution $t = \frac{1}{2}(s - \frac{ab}{s})$.

(5) Zeige: $L(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}) = \frac{a+b}{a-b}(L(b,a) - L(a,b)) \quad (a \neq b)$

[(4), (2) und $\frac{s^2}{(a^2+s^2)(b^2+s^2)} = \frac{a^2}{a^2-b^2}\frac{1}{a^2+s^2} - \frac{b^2}{a^2-b^2}\frac{1}{b^2+s^2}$.]

$$\begin{aligned}
\text{Somit: } J(\tfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) &\overset{(1)}{=} abI(\tfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) + \left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2 L(\tfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) \\
&\overset{(3)}{=} \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 I(a,b) - \left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2 L(\sqrt{ab}, \tfrac{a+b}{2}) \\
&\overset{(5)}{=} \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 I(a,b) - \tfrac{a^2-b^2}{4}(L(b,a) - L(a,b)) \\
&\overset{(3),(1)}{=} \tfrac{ab}{2} I(a,b) + \tfrac{1}{2} J(a,b)
\end{aligned}$$

Noch zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} |2^n J(a_n, b_n) - 2^n a_n^2 I(a_n, b_n)| = 0$.

Aus (1) im Beweis zu Lemma 2 folgt:

$$\begin{aligned} 2^n J(a_n, b_n) &= 2^n b_n^2 I(a_n, b_n) + 2^n(a_n^2 - b_n^2)L(a_n, b_n) \\ &= 2^n a_n^2 I(a_n, b_n) + 2^n(a_n^2 - b_n^2)(L(a_n, b_n) - I(a_n, b_n)) \end{aligned}$$

(1) im Beweis zu Satz 1 liefert wegen $\cos^2\varphi \le 1$:
$|L(a_n, b_n)| \le I(a_n, b_n) = I(a_0, b_0)$.

Aus Lemma 1(iii) ergibt sich: $2^n c_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.
[Bei quadratischer Konvergenz gegen 0 existieren $n_0 \in \mathbb{N}$,
$0 < q < 1$ und $C > 0$, so dass $\quad |c_n| \le C \cdot q^{2^n} \quad (n \ge n_0)$.]

Insgesamt:
$|2^n J(a_n, b_n) - 2^n a_n^2 I(a_n, b_n)| \le 2^n c_n \cdot 2 I(a_0, b_0) \to 0 \quad (n \to \infty)$.