MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann

SS 2010

Blatt 8

Numerische Mathematik und Informatik

Aufgabe 20 (I) (5 Punkte)

Sei $0 \le e < 1$, $T > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie *mit dem Kontraktionssatz*, dass die Kepler-Gleichung

$$\varphi - e \sin \varphi = 2\pi \frac{t}{T}$$

genau eine Lösung φ^* besitzt und dass das Iterationsverfahren

$$\varphi_{k+1} = e \sin \varphi_k + 2\pi \frac{t}{T} \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

für jeden Startwert $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ gegen diese Lösung konvergiert.

(b) Berechnen Sie für $t = \frac{T}{4}$ und $e = 0.0167$, $T = 365.256$ (Erdbahn) die Iterierten $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ und bestimmen Sie $|\varphi_4 - \frac{\pi}{2}|$ (Abweichung gegenüber einer homogenen kreisförmigen Bewegung) . Rechnen Sie diese Winkeldifferenz in eine Zeitdifferenz ($2\pi \hat{=} T$) um und geben Sie diese in Tagen+Stunden+Minuten an.

(c) Schätzen Sie ab, ob φ_4 eine Näherung an φ^* ist, die der Genauigkeit von 1 Minute entspricht.

Aufgabe 21 (I) (3 Punkte)

Leiten Sie für die Berechnung der Summe s_n in Aufgabe 22 für die Programmierung geeignete Rekursionsbeziehungen her, die ohne die Berechnung der Fakultäten $(2k+1)!$ und der Potenzen x^{2k+1} auskommen.

Aufgabe 22 (II) (8 Punkte)

Die Funktion $\sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ kann durch

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R})$$

approximiert werden.

Die Summation soll abgebrochen werden, wenn

$$\left| (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \le eps|s_n(x)| \quad \text{oder} \quad n > nmax$$

gilt.

Bitte wenden!

Vermeiden Sie die Berechnung von x^{2k+1} und $(2k+1)!$ und verwenden Sie statt dessen eine Rekursionsvorschrift für die Berechnung des jeweils neu hinzukommenden Summanden.

x soll eingelesen und mit 8 Nachkommastellen wieder ausgegeben werden. Geben Sie in derselben Zeile $s_n(x)$ und zum Vergleich $\sin(x)$ jeweils im Festpunktformat mit 15 Nachkommastellen aus.

Erstellen Sie ein Javaprogramm zur Lösung dieses Problems und testen Sie es mit $eps = 10^{-16}$ und $nmax = 100$ für $x = 1$, $x = -2$, $x = 3.1415926536$, $x = -10$ und $x = 40$.

(*Hinweis:* Wegen des Auslöschungseffekt können für größere Werte von $|x|$ keine genauen Ergebnisse erwartet werden.)

Zusätzlich zu einem Ausdruck der Programmquelle und der Ergebnisse ist auch die elektronische Abgabe per Email an die Adresse `mkc12ay@cip.mathematik.uni-muenchen.de` erforderlich.

Abgabetermin: Donnerstag, 15.7.2010, 11^{00} in der Vorlesung.