MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann

SS 2010

Blatt 6

Numerische Mathematik und Informatik

Aufgabe 15 (I) (4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Seien I, J Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(I) \subset J$. Sei f differenzierbar in $a \in I$, g differenzierbar in $f(a)$, $a \neq 0$, $f(a) \neq 0$, $g(f(a) \neq 0$. Dann gilt:

$$(\text{cond } g \circ f)(a) = (\text{cond } g)(f(a)) \cdot (\text{cond } f)(a).$$

(b) Sei I ein Intervall, $f : I \to]0, \infty[$ differenzierbar in $a \in I$, $a \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\text{cond } f^\alpha)(a) = \alpha \cdot (\text{cond } f)(a)$$

Hierin bezeichnet $f^\alpha : I \to]0, \infty[$ die durch $f^\alpha(x) := (f(x))^\alpha$ definierte Funktion.

Aufgabe 16 (I) (4 Punkte)

Die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2px + q = 0$$

mit $p^2 > q$ hat die zwei reellen Lösungen

$$(*) \quad x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q}, \quad x_2 = -p - \sqrt{p^2 - q}$$

Falls $x_1 \neq 0$, dann gilt $x_2 = \dfrac{q}{x_1}$.

(a) Berechnen Sie in der Ersatzarithmetik für $\mathbb{R}_{(t)} \cup \{0\}$ ($B = 10$, $t = 2$) die Lösungen der quadratischen Gleichung für $p = -16$, $q = 12$ nach den drei oben angegebenen Formeln und geben Sie jeweils den relativen Fehler an.

(b) Geben Sie für die Lösungen der quadratischen Gleichung Formeln an, die nur von p und q abhängen und die die Auslöschung im Fall, dass $|q|$ klein im Vergleich mit p^2 ist, vermeiden. (Hinweis: Geeignete Fallunterscheidung oder Verwendung der Vorzeichenfunktion)

Bitte wenden!

Aufgabe 17 (II) (8 Punkte)

Sei $a > 0$. Der Differenzenquotient $\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$ und der mathematisch äquivalente Ausdruck $\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ sollen jeweils für $h = h_0 \cdot q^i$ $(i = 0, \ldots, n)$ berechnet werden. Bestimmen Sie außerdem jeweils den Betrag der Differenz zur Ableitung der Wurzelfunktion im Punkt a.

Geben Sie in einer Tabelle rechtsbündig i mit Feldbreite 4, h im Exponentialformat mit 2 Mantissenstellen, beide Ausdrücke jeweils im Festpunktformat mit 15 Nachkommastellen und die Betragsdifferenzen im Exponentialformat mit 4 Mantissenstellen. aus. Versehen Sie die Tabelle mit einem Kopf, der den Spalteninhalt geeignet beschreibt. a, h_0, q und n sind einzulesen und zur Kontrolle wieder auszugeben.

Erstellen Sie ein Javaprogramm zur Lösung dieser Aufgabe und rechnen Sie folgende Beispiele:

(a) $a = 4$, $h_0 = 1$, $q = 0.1$, $n = 15$ (b) $a = 0.2$, $h_0 = 0.125$, $q = 0.5$, $n = 50$

Zusätzlich zu einem Ausdruck der Programmquelle und der Ergebnisse ist auch die elektronische Abgabe per Email an die Adresse `mkc12ax@cip.mathematik.uni-muenchen.de` erforderlich.

Abgabetermin: Donnerstag, 1.7.2010, 11^{00} in der Vorlesung.