

## Numerische Mathematik und Informatik

### Aufgabe 15 (I) (4 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) Seien  $I, J$  Intervalle,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $f(I) \subset J$ . Sei  $f$  differenzierbar in  $a \in I$ ,  $g$  differenzierbar in  $f(a)$ ,  $a \neq 0$ ,  $f(a) \neq 0$ ,  $g(f(a)) \neq 0$ . Dann gilt:

$$(\text{cond } g \circ f)(a) = (\text{cond } g)(f(a)) \cdot (\text{cond } f)(a).$$

- (b) Sei  $I$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow ]0, \infty[$  differenzierbar in  $a \in I$ ,  $a \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$(\text{cond } f^\alpha)(a) = \alpha \cdot (\text{cond } f)(a)$$

Hierin bezeichnet  $f^\alpha : I \rightarrow ]0, \infty[$  die durch  $f^\alpha(x) := (f(x))^\alpha$  definierte Funktion.

### Aufgabe 16 (I) (4 Punkte)

Die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2px + q = 0$$

mit  $p^2 > q$  hat die zwei reellen Lösungen

$$(*) \quad x_1 = -p + \sqrt{p^2 - q}, \quad x_2 = -p - \sqrt{p^2 - q}$$

Falls  $x_1 \neq 0$ , dann gilt  $x_2 = \frac{q}{x_1}$ .

- (a) Berechnen Sie in der Ersatzarithmetik für  $\mathbb{R}_{(t)} \cup \{0\}$  ( $B = 10$ ,  $t = 2$ ) die Lösungen der quadratischen Gleichung für  $p = -16$ ,  $q = 12$  nach den drei oben angegebenen Formeln und geben Sie jeweils den relativen Fehler an.
- (b) Geben Sie für die Lösungen der quadratischen Gleichung Formeln an, die nur von  $p$  und  $q$  abhängen und die die Auslöschung im Fall, dass  $|q|$  klein im Vergleich mit  $p^2$  ist, vermeiden. (Hinweis: Geeignete Fallunterscheidung oder Verwendung der Vorzeichenfunktion)

*Bitte wenden!*

**Aufgabe 17 (II)** (8 Punkte)

Sei  $a > 0$ . Der Differenzenquotient  $\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$  und der mathematisch äquivalente Ausdruck  $\frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$  sollen jeweils für  $h = h_0 \cdot q^i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) berechnet werden. Bestimmen Sie außerdem jeweils den Betrag der Differenz zur Ableitung der Wurzelfunktion im Punkt  $a$ .

Geben Sie in einer Tabelle rechtsbündig  $i$  mit Feldbreite 4,  $h$  im Exponentialformat mit 2 Mantissenstellen, beide Ausdrücke jeweils im Festpunktformat mit 15 Nachkommastellen und die Betragsdifferenzen im Exponentialformat mit 4 Mantissenstellen. aus. Versehen Sie die Tabelle mit einem Kopf, der den Spalteninhalt geeignet beschreibt.  $a$ ,  $h_0$ ,  $q$  und  $n$  sind einzulesen und zur Kontrolle wieder auszugeben.

Erstellen Sie ein Javaprogramm zur Lösung dieser Aufgabe und rechnen Sie folgende Beispiele:

(a)  $a = 4$ ,  $h_0 = 1$ ,  $q = 0.1$ ,  $n = 15$       (b)  $a = 0.2$ ,  $h_0 = 0.125$ ,  $q = 0.5$ ,  $n = 50$

Zusätzlich zu einem Ausdruck der Programmquelle und der Ergebnisse ist auch die elektronische Abgabe per Email an die Adresse `mkc12ax@cip.mathematik.uni-muenchen.de` erforderlich.

*Abgabetermin:* Donnerstag, 1.7.2010, 11<sup>00</sup> in der Vorlesung.