12. Integration bzgl. eines Maßes

12.1. Messbare Abbildungen

12.1. Definition Seien $(X,\mathcal{A})$, $(X',\mathcal{A}')$ Messräume und $f: X \to X'$ eine Abb.

f *$(\mathcal{A}-\mathcal{A}')$ messbar* $:\Leftrightarrow \forall A' \in \mathcal{A}' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$

d.h. $\sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{A}') := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\} \subseteq \mathcal{A}$

↑ σ-Alg. nach Lemma 11.6(a)

- speziell für $(X',\mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ heißt f *$(\mathcal{A}-)$ messbare Funktion*
- speziell für $(X',\mathcal{A}') = (\overline{\mathbb{R}}, \underbrace{\sigma(\mathcal{B} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\})}_{=: \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})})$ heißt f *$(\mathcal{A}-)$ messbare numerische Funktion*
- speziell für $(X,\mathcal{A},P)$ W. Raum heißt f (X'-wertige) *Zufallsvariable*.

12.2. Beispiel

Sei $(X,\mathcal{A})$ Messraum, $A \subseteq X$ und $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ die *Indikatorfkt.* (oder: Charakt. Fkt.) von A. Dann gilt

- $\mathbb{1}_A$ messbar $\Leftrightarrow$ A messbar (d.h. $A \in \mathcal{A}$)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{\bigcup_{j\in J} A_j} = \sup_{j\in J} \mathbb{1}_{A_j}$, $\mathbb{1}_{\bigcap_{j\in J} A_j} = \inf_{j\in J} \mathbb{1}_{A_j}$

$\boxed{12.3.\ \text{Satz}}$

(a) Seien $(X,\mathcal{A})$, $(X',\mathcal{A}')$ Messräume, sei $\mathcal{E}'$ Erzeuger von $\mathcal{A}'$.
Dann gilt:
$$f: X \to X' \text{ messbar} \iff f^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{A}$$

(b) Seien $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ topologische Räume und $f: X \to X'$!
Dann gilt
$$f \text{ stetig} \Rightarrow \begin{cases} f \ \underset{\sim\sim\sim}{\text{Borel-messbar}}, \text{ d.h.} \\ f \ \sigma(\mathcal{T})\text{-}\sigma(\mathcal{T}')\text{-messbar} \end{cases}$$

(c) Seien $(X_j,\mathcal{A}_j)$, $j=1,2,3$, Messräume und
$f_1: X_1 \to X_2$, $f_2: X_2 \to X_3$ messbare Abb. Dann gilt
$$f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3 \quad \text{messbar.}$$

Beweis (a) „$\Rightarrow$" klar.
„$\Leftarrow$": Betrachte $\tilde{\mathcal{A}} := \{A' \in \mathcal{P}(X') : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ (das feinste – d.h. grösste – Mengensystem in X', so dass f $\mathcal{A}$-$\tilde{\mathcal{A}}$ messbar ist)
n.V.: $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{E}'$. Beh: $\tilde{\mathcal{A}}$ ist σ-Alg. in X'
($\Rightarrow \tilde{\mathcal{A}} \supseteq \sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{A}' \Rightarrow f$ messbar ✓)
(i) $f^{-1}(X') = X \in \mathcal{A}$, (ii) $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow f^{-1}(\tilde{A}^c) = (f^{-1}(\tilde{A}))^c \in \mathcal{A}$
(iii) $(\tilde{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A}_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\tilde{A}_n) \in \mathcal{A}$. $\Rightarrow$ Beh.

(b) Folgt aus (a), denn n.V. gilt $f^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}$.

(c) Klar, da $\forall A_3 \in \mathcal{A}_3$: $(f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) = f_1^{-1}(\underbrace{f_2^{-1}(A_3)}_{\in \mathcal{A}_2}) \in \mathcal{A}_1$

∎

$\boxed{\text{12.4. Definition}}$ Sei X Menge, seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$, $j \in J$, Messräume und $f_j : X \to X_j \quad \forall j \in J$.

$\sigma(f_j, j \in J) := \sigma\left(\bigcup_{j \in J} f_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$ ist kleinste σ-Algebra auf X, bzgl. der alle f_j, $j \in J$, messbar,

die von $\{f_j\}_{j \in J}$ erzeugte σ-Algebra auf X.

12.5. Beispiel Sei $A \subseteq X \Rightarrow \sigma(1\!\!1_A) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$

$\boxed{\text{12.6. Lemma}}$ Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum. Dann gilt:

(a) $f : X \to \mathbb{R}$ messbar $\Leftrightarrow \underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a\}}_{=: \{f \leq a\}} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(b) $\Leftrightarrow \{f < a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(c) $\Leftrightarrow \{f \underset{(>)}{\geq} a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(d) $\Leftrightarrow \{f \overset{\geq}{\underset{(\leq)}{}} a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in D$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ dicht.

(e) $\Leftrightarrow \{f \in U\} \in \mathcal{A} \quad \forall U \subseteq \mathbb{R}$ offen

(f) $\Leftrightarrow \{f \in G\} \in \mathcal{A} \quad \forall G \subseteq \mathbb{R}$ abgeschl.

(g) $\Leftrightarrow \{a \leq f < b\} \in \mathcal{A} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

(analog mit $\overline{\mathbb{R}}$ statt $\mathbb{R}$)

Beweis: Satz 12.3(a), da alles Erzeuger von $\mathcal{B}$ ∎

12.7. Satz Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $f, f_n, g : X \to \mathbb{R}$, alle messbar für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\{f \lessgtr g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{A}$

(b) Für $c \in \mathbb{R}$ sind

Min, Max

$cf, f \pm g, fg, f \wedge g, f \vee g, |f|$ messbar

(c) $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup\limits_{n \to \infty} f_n, \liminf\limits_{n \to \infty} f_n$ messbar

(d) falls $\forall x \in X \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ existiert (pkt. weise)

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ messbar

(analog mit $\overline{\mathbb{R}}$ statt $\mathbb{R}$; fordere $f \pm g$ wohldef.)

Beweis. (a) folgt aus $\{f < g\} = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{q < g\})$

$$\{f \leq g\} = \{g < f\}^c$$

$$\{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\}$$

$\{f \neq g\} = \{f = g\}^c$, und Lemma 12.6.

(b) $\left.\begin{array}{l} f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \\ \gamma : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ r \mapsto cr\end{array} \text{ stetig} \overset{\text{Satz 12.3(b)}}{\Longrightarrow} \text{messbar} \end{array}\right\} \overset{12.3(c)}{\Longrightarrow} \begin{array}{l}\gamma \circ f = cf \\ \text{messbar}\end{array}$

Rest: Übung!

(c) • $\{\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq a\}$ messbar $(a \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Beh. mit Lemma 12.6

• $\inf\limits_n f_n = -\sup\limits_n (-f_n)$ messbar nach obigem & (b)

- $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} f_m$
  $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} f_m$ Beh. nach eben gezeigtem

(d) $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$ ∎

Zentrale Rolle in der Integrationstheorie:

12.8. Definition Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $f: X \to \mathbb{R}$

$$f \text{ Treppenfunktion} :\iff \begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}\ \exists A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}, \\ \exists a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R} : \quad f = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{A_n} \end{cases}$$

- stets messbar, da end. Linearkomb. von messbaren Indikatorfkt.'en.

12.9. Satz Sei $(X, \mathcal{A})$ und $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt:

$$f \text{ messbar} \iff \begin{cases} \exists \text{ Folge } (f_n)_n \text{ von Treppenfunktionen} \\ f_n: X \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f = \lim_{n\to\infty} f_n \\ \text{existiert pkt.-wise} \end{cases}$$

Falls $f \geq 0$, kann $(f_n)_n$ isoton gewählt werden, $f_n \uparrow f$.
Falls f beschränkt, kann $(f_n)_n$ so gewählt werden, dass die Konvergenz sogar gleichmäsig ist.

Beweis: "$\Leftarrow$" Satz 12.7(d), da Treppenfkt.'en messbar

"$\Rightarrow$": $f_\pm := \max\{\pm f, 0\}$ messbar nach Satz 12.7. $(0 = \mathbb{1}_\emptyset)$

und $f = \underbrace{f_+}_{\geq 0} - \underbrace{f_-}_{\geq 0}$ Positiv-, Negativteil von f

$\Rightarrow$ es genügt $f \geq 0$ zu betrachten, denn

aus $f_n^{\pm} \nearrow f_{\pm} \Rightarrow f_n^+ - f_n^- \to f_+ - f_- = f$

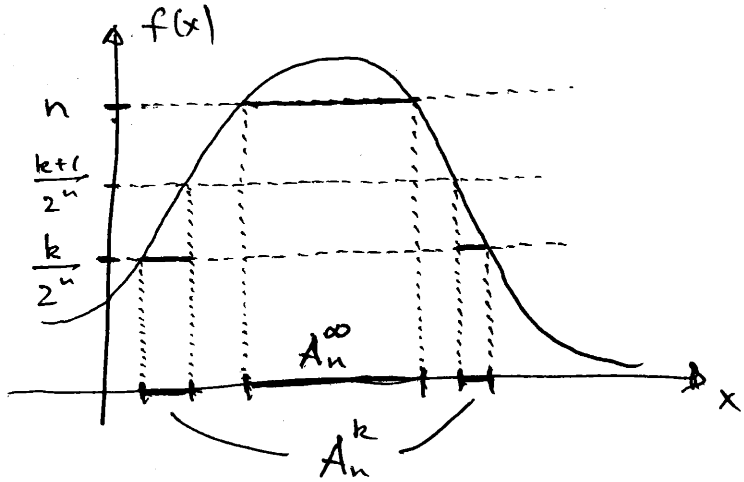
(beachte: $\{f_+ \neq 0\} \cap \{f_- \neq 0\} = \emptyset$)

Sei also $f \geq 0$, setze

$$A_n^k := \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\} \in \mathcal{A} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},\ k = 0, \dots, n2^n - 1\}$$

$$A_n^\infty := \{ f \geq n \} \in \mathcal{A}$$

$$f_n := n \mathbb{1}_{A_n^\infty} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{A_n^k}$$



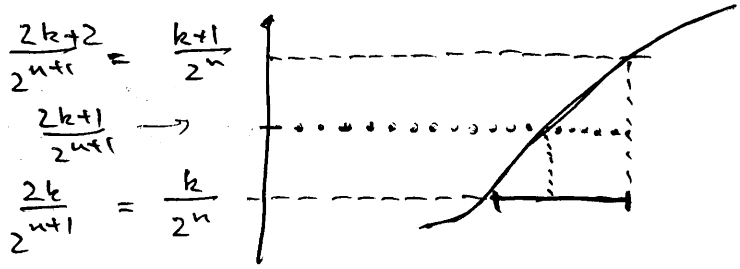
Treppenfkt. $\forall n \in \mathbb{N}$

mit

- $f_n \leq f_{n+1} \leq f \quad \forall n \in \mathbb{N}$

  ($f_{n+1} \leq f$: klar)

  ($f_n \leq f_{n+1}$: da Unterteilung $\{A_{n+1}^k\}$ eine Verfeinerung von $\{A_n^k\}_k$)



- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

  da 1. Fall: $f(x) = \infty \Rightarrow x \in A_n^\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f_n(x)}_{n} = \infty$

  2. Fall: $f(x) < \infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: f(x) < n_0$

  $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \ \exists k_n$ mit $x \in A_n^{k_n}$

  $\Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n} \Rightarrow$ Kgz. $(*)$

Falls f beschränkt: Nur 2. Fall möglich

& n_0 unabh. von $x \overset{(*)}{\Rightarrow}$ gleichm. Konv. $\blacksquare$

12.2. Integral von Elementarfunktionen

12.10. Definition Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum

(a) $E := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \geq 0$ Treppenfunktion$\}$
also insbes. messbar!

Raum der Elementarfkt.'en

(b) Sei $f \in E$

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$$ Normaldarstellung

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_j \geq 0 \ \forall j = 1, \ldots, n \text{ und} \\ \{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathcal{A} \text{ paarw. disjunkt.} \end{cases}$$

12.11. Bemerkung

(a) Normaldarstellung nicht eindeutig, es sei denn alle $\alpha_j > 0$ und paarw. verschieden

(b) Für $f, g \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \alpha f, f+g, f \vee g, f \wedge g \in E$

12.12 Lemma

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $f \in E$ mit 2 Normaldarstellungen

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} = f = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$$

Dann gilt $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(B_k)$$

Beweis: Sei $W := \{ w \in]0, \infty[: f^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset \}$

(Wertebereich von f ohne $\{0\}$; $\# W < \infty$)

$$\Rightarrow \dot{\bigcup}_{j:\alpha_j = w} A_j = f^{-1}(\{w\}) = \dot{\bigcup}_{k:\beta_k = w} B_k$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{w\in W} w \underbrace{\sum_{j:\alpha_j=w} \mu(A_j)}_{\mu(\dot{\bigcup}_{j:\alpha_j=w} A_j)} = \sum_{w\in W} w\, \mu(f^{-1}(\{w\})) \overset{\text{analog}}{=} \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(B_k) \qquad \boxtimes$$

Im folgenden liege immer ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zugrunde

$\boxed{\text{12.13. Definition}}$ (Integral von Elementarfkt'en)

Sei $E \ni f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ eine Normaldarstellung

Dann heißt
$$\int_X f(x)\, d\mu(x) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

das (μ-) Integral von f über X

12.14. Bemerkung

(1) Name "x" der Integrationsvariablen beliebig.

(2) Wohldef. wegen Lemma 12.13 (unabh. von Wahl der Normaldarstellung!)

(3) Gebräuchl. Alternativschreibweisen

$$\int_X d\mu(x) f(x), \quad \int_X f\, d\mu, \quad \int_X f(x)\, \mu(dx), \quad \dots$$

speziell für $\mu = \overset{(-)}{\lambda^d}$: $d\mu(x) = d^d x$ oder dx

(4) $f \mapsto \int f\, d\mu$ def. Abb. $E \to [0, \infty]$

12.15. Lemma Seien $f, g \in E$, $a \in [0, \infty[$, $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

(1) $\int_X \mathbb{1}_A(x)\, d\mu(x) = \mu(A)$

(2) $\int_X af\, d\mu = a \int_X f\, d\mu$ } (Linearität)

(3) $\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$ }

(4) $f \leq g \Rightarrow \int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$ (Monotonie)

Beweis: (1), (2) klar! (3), (4): Übung!

12.16. Lemma (Vorstufe des mon. Kgz.-satzes von Beppo Levi)

Sei $(f_n)_n \subseteq E$, $f \in E$ und $f_n \nearrow f$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu \qquad \left(= \int_X (\lim_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \right)$$

Beweis 1. Fall: $\mu(\{f \neq 0\}) = \infty$

wobei $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ $\Rightarrow$ o.E. kann man $\alpha_1 > 0$ & $\mu(A_1) = \infty$ annehmen.

Sei $A_1^{(n)} := \{f_n > \frac{\alpha_1}{2}\}$ $\Rightarrow$ $A_1^{(n)} \overset{(f_n)_n \text{ isoton}}{\subseteq} A_1^{(n+1)}$ und $A_1 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_1^{(n)}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\, d\mu\right) \overset{12.15(4)}{\geq} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_1}{2}\mu(\underbrace{A_1^{(n)}}_{\bigcup_{j=1}^{n} A_1^{(j)}})\right)$$

existiert in $\overline{\mathbb{R}}$, da mon. wachs. Folge

$$\overset{\text{Stetigkeit von unten}}{=} \frac{\alpha_1}{2}\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_1^{(j)}\right) \overset{\text{Monotonie } \mu}{\geq} \frac{\alpha_1}{2}\mu(A_1) = \infty$$

andererseits: $\int_X f\, d\mu \geq \alpha_1 \mu(A_1) = \infty$, also $\infty = \infty$

2. Fall: $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$

$f_n \leq f \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$ (*)

Umgekehrt sei $\varepsilon > 0$, $C_n := \{f - f_n > \varepsilon\} \in \mathcal{E}^t$, $\overset{\text{n.V.}}{\Rightarrow} C_n \downarrow \emptyset$

und $\mu(C_n) < \infty$, da $C_n \subseteq \{f \neq 0\}$ $\forall n$

Stetigkeit von oben

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$$

Nun setze $f_{max} := \max_{x \in X} f(x) < \infty$ (Treppenfkt.)

$$\Rightarrow \int_X f \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_{C_n} \underbrace{(f - f_n)}_{\leq f_{max}} d\mu + \int_X \underbrace{\mathbb{1}_{C_n^c} (f - f_n)}_{\leq \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{\{f \neq 0\} \cap C_n^c}} d\mu$$

$$\leq f_{max}\, \mu(C_n) + \varepsilon \underbrace{\mu(\{f \neq 0\})}_{=: M < \infty}$$

$\Rightarrow \int_X f \, d\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \varepsilon M$; da $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow$

$$\int_X f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \Rightarrow \text{Beh. mit (*)} \quad \blacksquare$$

12.3. Integration messbarer Funktionen

Generalvoraus. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum

12.17. Definition

(1) $E^* := \{ f : X \to [0,\infty] : f \text{ messbar} \}$
nicht-neg. numerische Fkt.'en

Satz 12.9.
$\iff E^* = \{ f : X \to [0,\infty] : \exists (f_n)_n \subseteq E \text{ isoton mit } \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n}_{\sup_n f_n} = f \}$

(2) Sei $f \in E^*$ und $(f_n)_n \subseteq E$ eine appr. Folge nach Satz 12.9.
Dann heißt

$$\int_X f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right)$$ (μ-) Integral von f

(stimmt für $f \in E$ mit Def. 12.14 überein).

12.18. Lemma

$\int_X f \, d\mu$ ist wohldefiniert, da unabh. von Wahl der approx. Folge $(f_n)_n$.

Beweis: Sei $(g_k)_k \subseteq E$, $g_k \uparrow f$ zweite approx. Folge.
Aus Symmetriegründen reicht es $\lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ zu zeigen.

Sei $\varphi_{k,n} := g_k \overset{\text{Min.}}{\wedge} f_n \in E \quad \forall k,n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ für festes $n \in \mathbb{N}$: $\varphi_{k,n} \nearrow f_n \in E$ (da $g_k \uparrow f \geq f_n$)

$\overset{\forall n}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu \geq \lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_{k,n} \, d\mu \underset{\text{Lemma 12.}}{=} \int f_n \, d\mu$

$\Rightarrow$ Beh. ∎

12.19. Lemma Seien $f, g \in E^*$, $a \in [0,\infty[$. Dann gilt:

(1) $af,\ f+g,\ f\cdot g,\ f\wedge g,\ f\vee g \in E^*$

(2) $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$

(3) $\int_X af\,d\mu = a\int_X f\,d\mu$

(4) $f \leq g \Rightarrow \int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$ (Monotonie)

Beweis: (1) Satz 12.7. (2)-(4) Lemma 12.15. + Limes ■

Ein erster Höhepkt.:

12.20. Satz (Monotone Kgz. nach Beppo Levi)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E^*$ mit $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Dann ist $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in E^*$ (existiert, da isoton) und
$\uparrow$ Satz 12.7(d)

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu \qquad \left(= \int_X (\lim_{n\to\infty} f_n)\,d\mu \right)$$

Beweis: Zu $f_n \in E^*$ $\exists\, (f_n^m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq E$ mit $f_n^m \nearrow f_n$ für $m\to\infty$.

Setze $h_m := \max\{f_1^m, \dots, f_m^m\} \in E$ (12.11(b))

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \bullet\ h_m \leq \max\{f_1,\dots,f_m\} = f_m \leq f \quad (*) \\ \bullet\ h_m \leq h_{m+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} h_m \leq f$ (insbes. ex. limes!) $(**)$

Andererseits: $f_n^m \leq h_m$ $\forall n = 1,\dots,m$

$\Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} h_m \geq \lim\limits_{m\to\infty} f_n^m \overset{\text{n.V.}}{=} f_n$; mit $n\to\infty$ $\overset{(**)}{\Rightarrow}$

$(h_m)_m \subseteq E$ und $h_m \uparrow f$ und
$$\int_X f \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_X h_m \, d\mu$$

Schließlich, da $f_n \leq f \Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_X \underbrace{h_m}_{(*) \leq f_m} d\mu \leq \lim_{m\to\infty} \int_X f_m \, d\mu$$

$\Rightarrow$ Beh. mit $n \to \infty$ ∎

12.21. Korollar Sei $(f_n)_n \subseteq E^*$. Dann ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in E^*$

und
$$\int_X \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu$$

Beweis: Aus mon. Kgz. mit $g_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$ ∎

Erinnerung: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $f_\pm := \max\{\pm f, 0\}$ ($\Rightarrow f = f_+ - f_-$)

dann gilt: f messbar $\Leftrightarrow$ (f_+ und f_- messbar)

12.22. Definition Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

f (μ-) integrierbar (über X) $:\Leftrightarrow$ f messbar und $\int_X f_+ \, d\mu < \infty$, $\int_X f_- \, d\mu < \infty$

In diesem Fall heißt
$$\int_X f \, d\mu := \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu \quad (\in \mathbb{R})$$

das (μ-) Integral von f (über X). Für $A \in \mathcal{A}$ sei

$$\int_A f \, d\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

12.23. Bemerkung

(1) Alternativschreibweisen wie in Bem. 12.14(3).

(2) Def. 12.22 stimmt für $f \in E^*$ mit Def. 12.17(2) überein

(3) Allgemeiner könnte man auch $\int_X f_+ \, d\mu = \infty$ oder $\int_X f_- \, d\mu = \infty$ (aber nicht beide!) erlauben – machen wir in Kap 12.5!

(4) Falls $(X, \mathcal{A}, \mu)$ W.-Raum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbare Zufallsvariable $\Rightarrow$
- $\mathbb{E}(f) := \int_X f \, d\mu$ Erwartungswert von f
- $\mathrm{Var}(f) := \mathbb{E}\left((f - \mathbb{E}(f))^2 \right)$ – Varianz von f.

12.24. Definition

$$\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\mu) := \mathcal{L}^1(X, \mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \ \mu\text{-integrierbar} \}$$

$$\overline{\mathcal{L}^1} := \overline{\mathcal{L}^1}(\mu) := \overline{\mathcal{L}^1}(X, \mu) := \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \ \mu\text{-integrierbar} \}.$$

(!) ↑

12.25. Satz Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind äquivalent

(i) $f \in \overline{\mathcal{L}^1}$

(ii) $f_+, f_- \in \overline{\mathcal{L}^1}$

(iii) $|f| \in \overline{\mathcal{L}^1}$

(iv) $\exists u, v \in \overline{\mathcal{L}^1} : f_+ \leq u, \ f_- \leq v$

(v) $\exists g \in \overline{\mathcal{L}^1} : \ |f| \leq g$

(Analog für $\mathbb{R}$ & $\mathcal{L}^1$)

Beweis: Übung.

12.26. Korollar $\overline{\mathcal{L}^1}$ ist Vektorverband, d.h. $\forall f, g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ und $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ gilt

(1) $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$ } linear

(2) $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ } linear

(3) $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ Monotonie

$\int d\mu$ ist monotone Linearform ($f \mapsto \int_X f \, d\mu$)

(4) $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$ Dreiecks-Ungl.

(5) $f \vee g,\ f \wedge g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ Verbandseigenschaft

(Analog für $\mathbb{R}$ & $\mathcal{L}^1$)

Beweis: (1)-(3) aus Lemma 12.19 durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil.

(4) $\left|\int f\,d\mu\right| = \left|\underbrace{\int f_+\,d\mu}_{\geq 0} - \underbrace{\int f_-\,d\mu}_{\geq 0}\right| \leq \int f_+\,d\mu + \int f_-\,d\mu = \int \underbrace{(f_+ + f_-)}_{|f|}\,d\mu$

(5) Aus $|f \vee g| \leq |f| + |g|$ bzw. $|f \wedge g| \leq |f| + |g|$, Satz 12.25 & (b) ∎

12.27. Beispiele

(i) Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $a \in X$, $\{a\} \in \mathcal{A}$. und $\mu = \delta_a$
(Dirac-Maß bei a konz.)

$\Rightarrow \overline{\mathcal{L}^1}(\delta_a) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : |f(a)| < \infty\}$

da $\int_X f(x)\,d\delta_a(x) = f(a)$ (siehe Übung!)

(ii) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ endlicher Maßraum (z.B. W.-Raum).

Dann gilt:

$f : X \to \mathbb{R}$ messbar, beschränkt $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

da $\int_X |f(x)|\,d\mu \leq \left(\sup_{x \in X} |f(x)|\right) \mu(X) < \infty.$

12.4. Eigenschaften fast überall

$\boxed{\text{12.28. Definition}}$ Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $\forall x \in X$ sei $Q(x)$ eine mathem. Aussage.

$Q(x)$ gilt für $(\mu$-$)$ fast alle $x \in X$ $:\Leftrightarrow \begin{cases} \exists N \in \mathcal{A},\ \mu(N) = 0 \\ \text{(Nullmenge!) und} \\ Q(x) \text{ gilt } \forall x \in N^c. \end{cases}$

[Q gilt $(\mu$-$)$ fast überall; $(\mu$-$)$ f.ü.]

12.29. Beispiele

(i) $f \in \mathcal{L}^1 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f \text{ ist f.ü. endlich} & \text{(Übung!)} \\ (\text{d.h.: } |f(x)| < \infty \ \forall x \in X \setminus N) \end{cases}$

(ii) $f = g$ f.ü., d.h. $f(x) = g(x) \ \forall x \in X \setminus N$

falls auch $g = h$ f.ü. $\Rightarrow f = h$ f.ü. ($\Rightarrow$ "$=$ f.ü." ist Äquival.relation!)

$\boxed{\text{12.30. Satz}}$ Sei $f \in E^*$. Dann gilt

$$\int_X f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ f.ü.} \quad (f \geq 0 \text{ wesentlich!})$$

Beweis: „$\Rightarrow$": $A_n := \{f > \frac{1}{n}\} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A_n \uparrow \{f > 0\}$

$$\overset{\text{Stetigkeit}}{\underset{\text{von unten}}{\Rightarrow}} \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\{f > 0\}) \quad (*)$$

Andererseits: $\frac{1}{n} \mathbb{1}_{A_n} \leq f \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \mu(A_n) \leq \int_X f \, d\mu = 0 \ \forall n$

(da $f \geq 0$!)

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \mu(\{f > 0\}) = 0$$

„$\Leftarrow$": $\exists (f_n)_n \subseteq E$, $f_n \uparrow f$ mit $\mu(\{f_n > 0\}) \leq \mu(\{f > 0\}) = 0$

$$\overset{\text{Treppenfkt.}}{\Rightarrow} \int_X f_n \, d\mu = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{Beh. mit}$$

Def. Integral für $f \in E^*$

$\boxtimes$

$\boxed{\text{12.31. Satz}}$ Seien $f, g : X \to \underbrace{\overset{(-)}{\mathbb{R}}}_{\text{messbar}}$ und $f = g$ μ-f.ü.

Dann gilt

(a) $f, g \in E^*$ $\Rightarrow$ $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

(b) $f \in \overset{(-)}{\mathcal{L}^1}$ $\Rightarrow$ $g \in \overset{(-)}{\mathcal{L}^1}$ und $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

Beweis. (a) Zerlege $f = f \cdot 1\!\!1_{\{f=g\}} + f \, 1\!\!1_{\{f \neq g\}}$

$$g = g \cdot 1\!\!1_{\{f=g\}} + g \, 1\!\!1_{\{f \neq g\}}.$$

- Satz 12-30 $\Rightarrow$ $\int \underbrace{f \cdot 1\!\!1_{\{f \neq g\}}}_{=0 \text{ f.ü.}} d\mu = 0 = \int \underbrace{g \cdot 1\!\!1_{\{f \neq g\}}}_{=0 \text{ f.ü.}} d\mu$
- $f \cdot 1\!\!1_{\{f=g\}} = g \cdot 1\!\!1_{\{f=g\}}$

$\Rightarrow$ Beh. ✓

(b) $f = g$ f.ü. $\Rightarrow$ $f_+ = g_+$ f.ü. und $f_- = g_-$ f.ü. $\overset{(a)}{\Rightarrow}$ Beh. ∎

$\boxed{\text{12.32. Korollar}}$ Seien $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $|f| \leq g$ μ-f.ü. Dann gilt auch $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Beweis: Setze $g' := |f| \vee g$ $\Rightarrow$ g' messbar und $g' = g$ f.ü. $\overset{\text{Satz 12-31(b)}}{\Rightarrow}$ $g' \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Da $|f| \leq g'$ (überall!)

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 12-25. ∎

12.5. Konvergenzbegriffe und Konvergenzsätze

Wie bisher liege stets ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zugrunde.

Eine Verallg. der mon. Kgz. nach B. Levi:

$\boxed{\text{12.33. Satz}}$ Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$ und $f_n \le f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ mit $g \le f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt, mit $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ (messb.)

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

(Die Integrale hier im Sinne von Bem. 12.23(3), da

$\int f_+ \, d\mu = +\infty$ möglich; $\int f_- \, d\mu < \infty$)

Beweis: O.E.: $g < \infty$ (sonst: ändere g auf $\{g = +\infty\}$ zu 0. Erfüllt immer noch Voraus.). Analog Bsp. 12.29(a):

$f_n \ge g \in \overline{\mathcal{L}^1} \Rightarrow \{f_n = -\infty\}$ Nullmenge. O.E.: $f_n > -\infty$

(sonst: ändere f_n, f, g auf $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n = -\infty\}$ zu 0; ändert Voraus. & $\int f_n \, d\mu$ nicht). Analog für f. (d.h. auf $\{f = -\infty\}$).

Setze $h_n := f_n - g \in E^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $h := f - g \in E^*$; damit $h_n \nearrow h$, also (Satz 12.20 (mon. Kgz)):

$$\lim_{n\to\infty} \int \underbrace{h_n}_{f_n - g} \, d\mu = \int h \, d\mu \qquad (1)$$

Aus $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ und $(f_n)_- \le g_-$ folgt $(f_n)_- \in \mathcal{L}^1$ und damit (Bmk. 12.23(c)): $\int f_n \, d\mu$ exist. Aus (1) also

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int h \, d\mu + \int g \, d\mu \qquad (2).$$

1. Fall: $\int h \, d\mu < \infty$. Also, $h \in \overline{\mathcal{L}^1}$. Dann ist

$f = h + g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ und $\int f\,d\mu = \int h\,d\mu + \int g\,d\mu \overset{(2)}{\Longrightarrow}$ Beh.

2. Fall $\int h\,d\mu = \infty$. Aus $g \leq f$ (da $g \leq f_n \uparrow f$) folgt $f_- \leq g_-$, also $\int f_-\,d\mu < \infty$

$\overset{h = f_+ - f_- g}{\Longrightarrow}$ $\int f_+\,d\mu = \infty \Rightarrow \infty = \int f\,d\mu = \int h\,d\mu + \int g\,d\mu \overset{(2)}{\Longrightarrow}$ Beh. ▨

Verzichtet man auf Isotonie, so gilt immer noch:

$\boxed{\text{12.34. Satz}}$ (Lemma von Fatou)

Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$, sei $g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ mit $f_n \geq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Mit $f := \liminf_{n\to\infty} f_n$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \geq \int f\,d\mu \quad \left(= \int \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \right)$$

(Die Integrale wieder wie im Sinn von Bem. 12.23(3))

Beweis: Da $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf_{n:n\geq m} f_n}_{=:g_m}$ messbar

$\Rightarrow g_m \geq g$ und $g_m \nearrow f \overset{\text{Satz 12.33}}{\Longrightarrow}$

$$\int f\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int g_m\,d\mu = \liminf_{m\to\infty} \int \underbrace{g_m}_{\leq f_m}\,d\mu$$ ▨

12.35. Bemerkung

(1) Analog gilt für $f_n \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(g \in \overline{\mathcal{L}}^1)$:

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

(ersetze $f_n \to -f_n$ in Fatou)

(2) Auf die Bed. $f_n \geq g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ kann nicht verzichtet werden!

12.36. Satz (von der majorisierten (oder dominierten) Konvergenz von H. Lebesgue)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{L}}^1$, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $h \in \overline{\mathcal{L}}^1$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ f.ü.,

und $|f_n| \leq h$ f.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann $\exists \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ mit $\tilde{f} = f$ f.ü. und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$$

Ist f auch messbar, so folgt: $f \in \overline{\mathcal{L}}^1$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \qquad \left(= \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu \right)$$

Beweis: Sei $A := \{ \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n \} \in \mathcal{A}$ (da f_n messbar)

und: $(f_n)_n$ konv. auf A, d.h. $\mu(A^c) = 0$.

$\exists \tilde{h} \in \overline{\mathcal{L}}^1$, $\tilde{h} = h$ f.ü. mit $|f_n| \leq \tilde{h}$ (überall!) $\forall n \in \mathbb{N}$

Setze $\varphi := \lim_{n\to\infty} f_n \cdot \mathbb{1}_A \Rightarrow$ messbar und $|\varphi| \leq \tilde{h} \overset{12.25(v)}{\Longrightarrow} \varphi \in \overline{\mathcal{L}}^1$

$\Rightarrow \exists \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ mit $\varphi = \tilde{f}$ f.ü.

Nun: $\underbrace{\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu}$ $\underset{\text{Bem. 12.35(1)}}{\overset{f_n \leq \tilde{h}}{\leq}} \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu \overset{\mu(A^c)=0 \,\&\, 12.31}{=} \int \limsup_{n\to\infty} f_n \mathbb{1}_A \, d\mu$

$$= \underbrace{\int \varphi \, d\mu}_{\overset{12.31}{=} \int \tilde{f} d\mu} \underset{\text{Def. } \varphi \,\&\, A}{=} \int \liminf_{n\to\infty} f_n \mathbb{1}_A \overset{\mu(A^c)=0 \,\&\, 12.31}{=} \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu$$

$$\underset{f_n \geq -\tilde{h}}{\overset{\text{Fatou}}{\leq}} \underbrace{\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$$

Zusatz: Falls f messbar $\exists \mu$-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit

$f \mathbb{1}_{N^c} = \varphi \mathbb{1}_{N^c} \Rightarrow$ Beh. mit Satz 12.31(b) ∎

12.37. Definition (Konvergenzbegriffe)

Seien $f_n, f: X \to \mathbb{R}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Konvergenz (μ-) f.ü.: $f_n \xrightarrow[f.ü.]{n\to\infty} f \;:\Leftrightarrow$

  $\exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert $\forall x \in X \setminus N$

  und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

  (schon bekannt!)

- (μ-) stochastische Konvergenz: (oder: Kgz. dem Maße nach)

  $f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} f \;:\Leftrightarrow\; \forall A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ $\forall \varepsilon > 0$ gilt:

  $$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

[Im Fall $\mu(X) < \infty$ genügt es $A = X$ zu betrachten!]

- Konvergenz in L^1 (-Norm): $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{n\to\infty} f \;:\Leftrightarrow$

  $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, wobei $\|g\|_1 := \int |g| \, d\mu$ (L^1-Norm)

12.38. Satz

Konvergenz fastüberall (f.ü.) $\Rightarrow$ stochastische Konvergenz

Konvergenz in L^1 $\Rightarrow$ stochastische Konvergenz

Hilfsmittel zum Beweis:

12.39. Lemma (Tschebyscheff-Ungleichung)

Sei $f \in \overline{\mathcal{L}^1}$, $f \geq 0$, und $\varepsilon > 0$ bel. Dann gilt

$$\mu(\{f \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int f \, d\mu$$

Beweis:
$$f \geq f \cdot \mathbb{1}_{\{f \geq \varepsilon\}} \geq \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{\{f \geq \varepsilon\}}$$
$$\Rightarrow \quad \int f \, d\mu \geq \varepsilon \mu(\{f \geq \varepsilon\}) \qquad \blacksquare$$

Beweis von Satz 12.38.

„$\Rightarrow$": Tschebyscheff mit $|f-f_n|$:
$$\mu(\{|f-f_n| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f-f_n\|_1$$

„$\Downarrow$": Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ bel. fest, sei $\varepsilon > 0$.
n. V. $\exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0$: $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in X \setminus N$.

Setze $C_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$
$$B_n := \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N}: \\ m \geq n}} C_m = \{x \in X : \exists m \geq n : |f_m(x) - f(x)| > \varepsilon\}$$

$\Rightarrow \quad B_n \downarrow B$ für $n \to \infty$ mit $B := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k \subseteq N$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \mu(A \cap C_n) \leq \mu(A \cap B_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$
Stetigkeit von oben $\blacksquare$

12.40 Warnung: Es gelten keine Umkehrungen in Satz 12.38, auch nicht „$\Uparrow$" oder „$\Downarrow$".

Bsp. für $\not\Downarrow$: $X = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}, \mu = \lambda$,
$$f_n := \frac{n}{2} \mathbb{1}_{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow[\text{f.ü.}]{n \to \infty} 0, \quad \text{aber} \quad \|f_n - 0\|_1 = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(also hier keine Limitenvertauschung)

Für „$\Uparrow$" (und damit auch „$\Uparrow$") existiert Abschwächung:

$\boxed{\text{12.41. Satz}}$ Sei μ σ-endlich und seien $f_n, f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} f \iff \begin{cases} \forall \text{ Teilfolgen } (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ von } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}} \text{ mit } f_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{\ell\to\infty} f \end{cases}$$

(Satz gilt auch ohne Vorraus., dass μ σ-endlich; siehe Bauer)

$\boxed{\text{12.42. Korollar}}$ Unter den Vor. wie in 12.40 gilt

$$f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{n\to\infty} f \Rightarrow \begin{matrix} \forall \text{ Teilfolgen } (f_{n_k})_k \text{ von } (f_n)_n \\ \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_{k_\ell}})_\ell \text{ mit } f_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{\ell\to\infty} f \end{matrix}$$

Beweis von Satz 12.41: O.E. sei $f = 0$!

„$\Leftarrow$": Ann.: $f_n \not\xrightarrow[\mu]{} 0 \Rightarrow \exists \varepsilon, \delta > 0, A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $\mu(\{x \in A : |f_{n_k}(x)| > \varepsilon\}) > \delta \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (*)

n.V. hat $(f_{n_k})_k$ f.ü. kgt.'e Teilfolge $(f_{n_{k_\ell}})_\ell$

$\overset{\text{Satz 12.38}}{\Longrightarrow} \quad f_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\mu]{\ell\to\infty} 0 \quad \lightning$ zu (*).

„$\Rightarrow$": Ohne E. genügt es zu zeigen:

$$f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} 0 \Rightarrow \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_k})_k \text{ von } (f_n)_n \text{ mit } f_{n_k} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{k\to\infty} 0 \quad (**)$$

– denn, sei $(f_{m_k})_k$ bel. Teilfolge von $(f_n)_n \Rightarrow f_{m_k} \xrightarrow[\mu]{k\to\infty} 0$ (n.V.)

$\overset{(**)}{\Longrightarrow} (f_{m_k})_k$ besitzt f.ü. kgt.'e Teilfolge.

zu (**): Sei $X_\ell \in \mathcal{A}$, $\mu(X_\ell) < \infty \ \forall \ell \in \mathbb{N}$ und $X_\ell \nearrow X$ (σ-endlich)

Sei ℓ fix. N.V. gilt: $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists n_k \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_k:$

$$\mu(\{x\in X_\ell : |f_n(x)| > \tfrac{1}{k}\}) = \mu(\{|f_n \mathbb{1}_{X_\ell}| > \tfrac{1}{k}\}) \le \tfrac{1}{2^k}$$

O.E.: wähle n_k so $n_{k+1} > n_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$; setze

$$A_k^\ell := \{|f_{n_k}\mathbb{1}_{X_\ell}| > \tfrac{1}{k}\} \quad \text{und} \quad A^\ell := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}:\\ k\ge j}} A_k^\ell$$

(NB: $x\in A^\ell \Leftrightarrow x\in A_k^\ell$ für unend. viele $k\in\mathbb{N}$).

Dann gilt: (ℓ fix)

- $x\notin A^\ell \Rightarrow \underbrace{x\in X\setminus A_k^\ell}$ für schließlich alle k

$$\Leftrightarrow |f_{n_k}(x)\mathbb{1}_{X_\ell}(x)| \le \tfrac{1}{k}$$

$$\Rightarrow (f_{n_k}\mathbb{1}_{X_\ell})(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

- $\mu(A^\ell) \le \mu\Big(\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\ge j}} A_k^\ell\Big) \le \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ $\quad\underline{\forall j\in\mathbb{N}}$

$$\overset{j\to\infty}{\Rightarrow} \mu(A^\ell) = 0$$

$\Rightarrow A := \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} A^\ell$ ist Nullmenge und $\forall x\in X\setminus A$ gilt

$$(f_{n_k}\mathbb{1}_{X_\ell})(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \forall \ell\in\mathbb{N} \underset{\text{j}}{\Rightarrow} f_{n_k}(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

wähle ℓ, so $x\in X_\ell$ ($X_\ell \uparrow X$)

d.h. $\quad f_{n_k} \underset{\text{f.ü.}}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} 0$

Nun noch zu „$\Leftarrow$" in Satz 12.38.:

12.43. Definition Sei $f_j \in \mathcal{L}^1$ $\forall j\in J$ (Indexmenge)

$(f_j)_{j\in J}$ gleichgradig integrierbar $:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon>0\ \exists h\in\mathcal{L}^1,\ h\ge 0: \\ \int |f_j|\cdot \mathbb{1}_{\{|f_j|\ge h\}}\,d\mu < \varepsilon \quad \forall j\in J \end{cases}$

12.44. Bemerkung: Ist μ endlicher Maß (z.B. W.-Raum) ist gleichgradig int.-bar. äquiv. zu def. als

$$(f_j)_{j\in J} \text{ gleichgradig int.-bar} \iff \sup_{j\in J}\int |f_j|\cdot \mathbb{1}_{\{|f_j|\geq N\}}\,d\mu \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

12.45. Beispiel: Es gebe $g\in\mathcal{L}^1$ mit $|f_j|\leq g$ f.ü. $\forall j\in J$ (insbesondere erfüllt, falls J endlich: Wähle $g:=\max_j |f_j|$)

$\Rightarrow$ $(f_j)_{j\in J}$ gleichgradig integrierbar. (wähle z.B. $h=2g$).

$\boxed{\text{12.46. Satz}}$ Seien $f, f_n\in\mathcal{L}^1$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(i) $f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} f$ und $(f_n)_n$ gleichgradig integrierbar

(ii) $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{n\to\infty} f$.

Beweis. Siehe z.B. Bauer.

12.47. Bemerkung

(1) Sei $f_n \xrightarrow[\text{f.ü.}]{n\to\infty} f$, $|f_n|\leq g\in\mathcal{L}^1$ $\Rightarrow$ Satz 12.38, Bsp. 12.45 & Satz 12.46 (Teil „(i) $\Rightarrow$ (ii)"): $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_1=0$

(2) Da $\|f_n-f\|_1=\int|f_n-f|\,d\mu\geq\left|\int f_n\,d\mu-\int f\,d\mu\right|$

ist (1) eine Verschärfung von Satz 12.36 (maj. Konv.)

Wir beweisen (1) später auf andere Weise...

Am Ende 2 wichtige Anwendungen von maj. Konv.:

12-48. Satz (Stetigkeit & Diff.barkeit von Parameterintegralen)

Sei (M,d) metrischer Raum, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f: M\times X \to \mathbb{R}$ eine Abb. so daß:

(1) $\forall t\in M$: $f(t,\cdot)$ ist integrierbar

Sei $F: M \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t) := \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$

(a) Sei $t_0\in M$; angenommen (zusätzlich zu (1)):

(2) $\forall x\in X$: $f(\cdot,x)$ ist stetig in t_0

(3) $\exists g: X\to [0,\infty]$ integrierbar mit $|f(t,x)|\le g(x)$ $\forall t\in M$ $\forall x\in X$

Dann gilt: F ist stetig in t_0

(b) Sei $M = I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall. Es gelte (1) und

(2') $\forall x\in X$: $f(\cdot,x)$ diff.bar auf I

(3') $\exists g: X\to[0,\infty]$ integrierbar mit $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \le g(x)$ $\forall t\in I$, $\forall x\in X$

Dann ist F diff.bar, $\forall t\in I$ ist $\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)$ integrierbar, und es gilt

$$F'(t) = \frac{dF}{dt}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x).$$

Beweis: (a) Sei $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in M mit $t_k\to t_0$, $k\to\infty$.

Dann, $\forall x\in X$: $f_k(x) := f(t_k,x) \xrightarrow[k\to\infty]{(2)} f(t_0,x)$,

$\forall k$: $f_k\in\mathcal{L}^1(\mu)$ wegen (1), und $|f_k|\le g$ aus (3)

maj. Konv. $\Longrightarrow$ $\underbrace{\int f_k(x)\,d\mu(x)}_{=F(t_k)} \xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{\int f(t_0,x)\,d\mu(x)}_{=F(t_0)}$ $\Rightarrow$ F folgenstetig in t_0 ✓

(b) Seien $t \in I$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge mit $t+h_n \in I$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und setze

$$f_n : x \longmapsto \frac{f(t+h_n,x)-f(t,x)}{h_n} \,.$$

Es gilt, $\forall x \in X$: $\quad f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ (wegen (2'))

Nach dem MWS: $\forall x,n \; \exists\, \theta_{x,n} \in]0,1[$ mit

$$f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t+\theta h_n, x)$$

Nach (3') gilt $\quad |f_n| \le g \;\; \forall n \in \mathbb{N}$,

und damit

$$F'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t+h_n)-F(t)}{h_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,d\mu(x)$$

$$\underset{12\text{-}36}{\overset{\text{maj.-Konv.}}{=}} \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x) \qquad \blacksquare$$