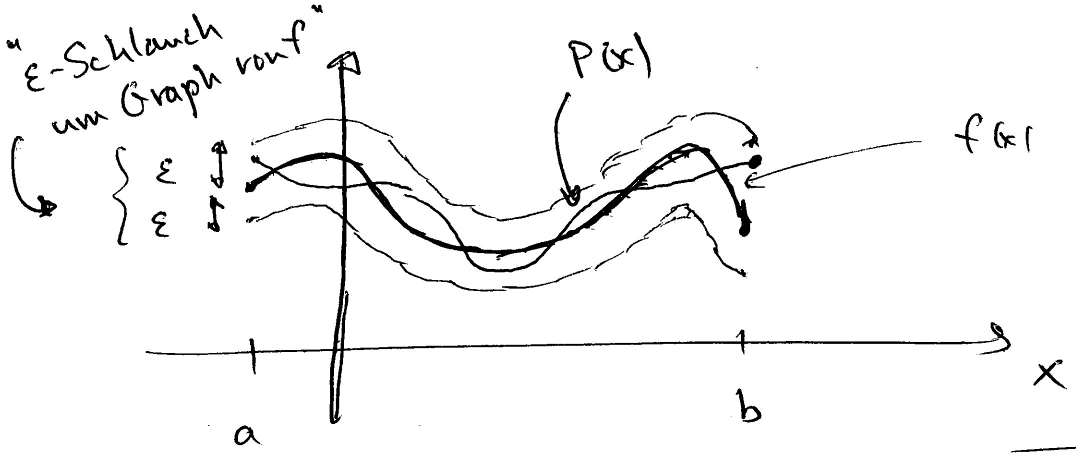
Sektion 5: Weierstraß'sche Approximationssatz

Wir sind jetzt so weit! Wir können jetzt das Hauptresultat dieser Kurses formulieren & beweisen:

Satz 5.1 (Weierstraß'sche Approximationssatz)

Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossene & beschränktes Intervall, sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert Polynom $P : \cancel{[a,b]}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so daß $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$.



Beweis: Man kann leicht (!) zeigen: Genügt Fall $I \equiv [a,b] \equiv [0,1]$ zu beweisen.

Wir erinnern an die Sätze 4.4 & 4.6:

(1) f ist glm. stetig auf I: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so daß: Wenn $x, y \in I$ und $|x-y| < \delta$, dann auch

(*) $$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (!)$$

(2) f ist beschränkt auf I: Es existiert $K > 0$ so daß:

(**) $$|f(x)| \le K \quad \text{für alle } x \in I$$

Für $\varepsilon > 0$ im Satz 5.1, wähle $\delta > 0$ so daß (*) gilt, und wähle/nehme K so daß (**) gilt.

Wir erinnern auch an die Bernsteinpolynome und deren Eigenschaften (siehe Bsp. 2-8(c))

(3) Das Bernsteinpolynom B_n zu f ist

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{für } n\in\mathbb{N},\ x\in[0,1]$$

(für $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ Fkt.).

Setze
$$g_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad n\in\mathbb{N},\ 0\le k\le n,\ x\in[0,1]$$

Dann ist $g_{n,k}(x)\ge 0$ und $\sum_{k=0}^{n} g_{n,k}(x) = 1$ für alle n und $x\in[0,1]$.

Damit ist, für alle $x\in[0,1]$, und alle $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \underset{\text{Rechenregeln Summe.}}{=} f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = f(x)\sum_{k=0}^{n} g_{n,k}(x)$$
$$= f(x)\cdot 1 = f(x)$$

Also ist, für alle $x\in[0,1]$ & alle $n\in\mathbb{N}$,

$$|B_n(x)-f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

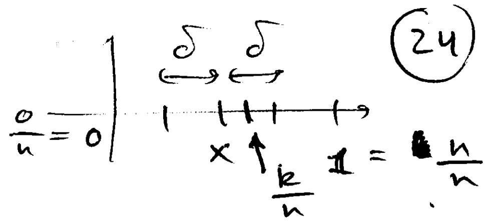
$$\underset{\text{Rech.regl. Summen}}{=} \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right) g_{n,k}(x)\right| \qquad (\square)$$

$$\le \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| g_{n,k}(x) \quad (\text{Lemma 1.9 \& } g_{n,k}\ge 0)$$

Ziel: Für das $\varepsilon>0$ im Satz gegeben, n (groß) finden, so daß rechte Seite in $(\square) < \varepsilon$ für alle $x\in[0,1]$

Dann $P_n \equiv B_n$ nehmen – und Satz ist bewiesen!

Für fixes $x\in[0,1]$, betrachten wir für k ($0\le k\le n$) (in $\sum_{k=0}^{n}$) zwei Fälle:



1. Fall: k erfüllt $\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta$:

Dann ist (wegen (*) in (1)) auch

$$\left|f\left(\tfrac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Also ist ($g_{n,k}\geq 0$)

$$\sum_{\{k:\,|\frac{k}{n}-x|<\delta\}}\left|f\left(\tfrac{k}{n}\right)-f(x)\right|g_{n,k}(x)\leq\sum_{\{k:\,|\frac{k}{n}-x|<\delta\}}\frac{\varepsilon}{2}\cdot g_{n,k}(x) \qquad (\square\square)$$

Rech.-regl. Summe

$$\overset{\delta}{=}\frac{\varepsilon}{2}\sum_{\{k:\,|\frac{k}{n}-x|<\delta\}}g_{n,k}(x)\underset{g_{n,k}\geq 0}{\leq}\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}g_{n,k}(x)=\frac{\varepsilon}{2}$$

$\sum_{k=0}^{n}g_{n,k}(x)=1$ für alle $x\in[0,1]$

2. Fall: k erfüllt $\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta$:

Es gilt (wegen Lem. 1.8(ii) & (**) in (2); $x,\frac{k}{n}\in[0,1]$)

$$\left|f\left(\tfrac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leq\left|f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|+|f(x)|\leq K+K=2K.$$

Also ist ($g_{n,k}(x)\geq 0$)

$$\sum_{\{k:\,|\frac{k}{n}-x|\geq\delta\}}\left|f\left(\tfrac{k}{n}\right)-f(x)\right|g_{n,k}(x)\leq 2K\sum_{\{k:\,|\frac{k}{n}-x|\geq\delta\}}g_{n,k}(x) \qquad (\nabla)$$

Für die k's in Frage, gilt $\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\geq\delta$, d.h.

$\left(\dfrac{\frac{k}{n}-x}{\delta}\right)^2\geq 1.$ Also ist ($g_{n,k}\geq 0$)

$$\sum_{\{k:\,|\frac{k}{n}-x|\geq\delta\}}g_{n,k}(x)\leq\sum_{\{k:\,|\frac{k}{n}-x|\geq\delta\}}\left(\frac{k/n-x}{\delta}\right)^2g_{n,k}(x)\leq\frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2g_{n,k}(x) \qquad (\nabla\nabla)$$

positive Terme zu-addiert.

Behauptung: Es gilt, für $x\in[0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2g_{n,k}(x)\overset{!}{=}\frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{n} \qquad (\nabla\nabla\nabla)$$

klar: $x\in[0,1]$

Angenommen $(\triangledown\triangledown\triangledown)$ gilt (werden wir später beweisen)

Dann folgt aus $(\triangledown)$ & $(\triangledown\triangledown)$ & $(\triangledown\triangledown\triangledown)$, daß

$$\sum_{\{k : |\frac{k}{n} - x| \geq \delta\}} |f(\tfrac{k}{n}) - f(x)|\, g_{n,k}(x) \overset{(\triangledown)\&(\triangledown\triangledown)}{\leq} \frac{2K}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (\tfrac{k}{n} - x)^2 g_{n,k}(x) \overset{(\triangledown\triangledown\triangledown)}{\leq} \frac{2K}{\delta^2} \frac{1}{n}$$

Wähle jetzt $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\frac{2K}{\delta^2} \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

(d.h., $n > \frac{4K}{\varepsilon \delta^2}$). Dann folgt

$$\sum_{\{k : |\frac{k}{n} - x| \geq \delta\}} |f(\tfrac{k}{n}) - f(x)|\, g_{n,k}(x) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\square\square\square)$$

Aus $(\square)$ & $(\square\square)$ & $(\square\square\square)$ folgt: Für $x \in [0,1]$ & $n > \frac{4K}{\varepsilon\delta^2}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \overset{(\square)}{\leq} \sum_{k=0}^{n} |f(\tfrac{k}{n}) - f(x)|\, g_{n,k}(x)$$

$$= \sum_{\{k : |\frac{k}{n} - x| < \delta\}} \cdots + \sum_{\{k : |\frac{k}{n} - x| \geq \delta\}} \cdots$$

$$\overset{(\square\square)\&(\square\square\square)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2K}{\delta^2} \frac{1}{n} \underset{\text{Wahl von } n}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\underline{\varepsilon}}$$

– Dann **Ziel** erreicht – und damit Satz bewiesen! – Bleibt übrig:

Behauptung $(\triangledown\triangledown\triangledown)$ zu beweisen!

Beweis (▽▽▽): Erinnerung:

$$\frac{k}{n}\cdot\binom{n}{k} \underset{(k>0)}{\overset{(\Delta)}{=}} \binom{n-1}{k-1}, \qquad \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\cdot\binom{n}{k} \underset{(k>1)}{\overset{(\Delta\Delta)}{=}} \binom{n-2}{k-2}$$

Also ist

k=0-Term fällt weg + Rechenregeln Summe + (Δ)

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{\overbrace{(n-1)-(k-1)}^{=n-k}}$$

$$\underset{\text{Üb. 1.2(4)}}{=} x\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} = x\cdot\sum_{k=0}^{n-1}g_{n-1,k}(x) \quad \text{(a)}$$

$$\underset{\text{Bsp. 2.8(c)}}{=} x\cdot 1 = \underline{\underline{x}}$$

Analog:

k=0, k=1 Terme fallen weg + (ΔΔ)

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{\overbrace{(n-2)-(k-2)}^{=n-k}}$$

$$\underset{\text{Index verschieben}}{=} x^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-2-k} = x^2\sum_{k=0}^{n-2}g_{n-2,k}(x) = x^2\cdot 1 = \underline{\underline{x^2}}$$

(b)

Erinnerung: (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g_{n,k}(x) = 1$ für alle $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $x\in[0,1]$

Wir haben:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 g_{n,k}(x) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2 g_{n,k}(x) + x^2\underbrace{\sum_{k=0}^{n}g_{n,k}(x)}_{=1} - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}k\,g_{n,k}(x) \quad \text{(d)}$$

Aus (a) folgt:

$$\frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}k\,g_{n,k}(x) = 2x\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}g_{n,k}(x) = 2x\cdot x = 2x^2$$

und aus (b) folgt:

$$x^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} g_{n,k}(x) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n} k^2 g_{n,k}(x) - \frac{1}{n-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} g_{k,n}(x)}_{= x \quad (\text{aus } (a))}$$

also

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n} k^2 g_{k,n}(x) = x^2 + \frac{x}{n-1}$$

und damit

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k^2 g_{n,k}(x) = \frac{n(n-1)}{n^2} \underbrace{\left(\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n} k^2 g_{n,k}(x) \right)}_{= x^2 + \frac{x}{n-1}}$$

$$= \frac{n(n-1)}{n^2} \left(x^2 + \frac{x}{n-1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{x}{n}$$

Also ist (siehe (d))

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 g_{n,k}(x) = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{x}{n}\right] + x^2 - 2x^2$$

$$= x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n} + x^2 - 2x^2 = \frac{x - x^2}{n} = \frac{x(1-x)}{n} \quad \blacksquare$$