Section 2 : Binomialkoeffizienten & Binomialformel

Motivation: Für eine Funktion $f : [0,1]$ wollen wir (später) Polynome $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ konstruieren (aus f), so daß, falls f stetig ist, "P_n näher und näher an f kommt, je größer n wird" (siehe Titel vom Kurs)

Def. 2.1: Wir definieren induktiv die Fakultät:

"$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$" : (ungenau).

Sei (i) $0! := 1$, (ii) $1! := 1$

(iii) $n! := n \cdot (n-1)!$, $n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$.

(Bem.: Aus (i) & (iii) (für $n \geq 1$) würde (ii) folgen).

Bsp. 2.2: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 20 \cdot 6 = 120$.

Def. 2.3: Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$,

Sei $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (Binomialkoeffizient, "n über k")

Bsp. 2.4 (a) $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} \overset{\text{Def. 2.1}}{=} 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} \underset{\text{Def. 2.1}}{=} \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$.

(c) $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1 = \binom{n}{0}$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

(d) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(\underbrace{n-(n-k)}_{k})!} = \binom{n}{n-k}$

Lemma 2.5 Es gilt

(i) $\frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ für $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$

(ii) $\frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-2}$ für $k, n \in \mathbb{N}$, $1 < k \leq n$

Beweis: (i) Siehe Übungen!

(ii) Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 < k \leq n$ ist $0 < k-1 \leq n-1$, so, aus (i) (2 mal, zuerst wie in (i), dann mit $k-1$, $n-1$):

$$\frac{k-1}{n-1}\left(\frac{k}{n} \cdot \binom{n}{k}\right) = \frac{k-1}{n-1} \cdot \left(\binom{n-1}{k-1}\right) = \binom{n-2}{k-2} \quad \blacksquare$$

Satz 2.6 (Binomischer Satz / Binomialformel)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:

(□) $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Bsp. 2.7 (a) $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^0 b^{2-0} + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^{2-2}$

$= 1 \cdot 1 \cdot b^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot a^2 \cdot 1$ (Bsp. 2.4 & Def. 1.10 (i) & (iii) (a))

$= a^2 + b^2 + 2ab$

(b) $(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^0 b^{3-0} + \binom{3}{1} a^1 b^{3-1} + \binom{3}{2} a^2 b^{3-2} + \binom{3}{3} a^3 b^{3-3}$

$= 1 \cdot 1 \cdot b^3 + 3 \cdot a \cdot b^2 + 3 \cdot a^2 b + 1 \cdot a^3 \cdot 1$

(Bsp. 2.4 & Def. 1.10 (a) (i) & (iii))

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Beweis (von Satz 2.6): Induktion!

Zuerst: $n=0$: Linke Seite in ($\square$) $= (x+y)^0 = 1$ (Def. 1.10 (a)(i)).

Rechte Seite in ($\square$) $= \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} = 1$

↑ Def. 1.2 (i) ↑ Bsp. 2.4 (a) & Def. 1.10 (a) (i)

Also ($\square$) ok für $n=0$.

Ind.-anfang: $n=1$:

Linke Seite in ($\square$) $= (x+y)^1 = x+y$ (Def. 1.10 (a) (iii)).

Rechte Seite in ($\square$) $= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k y^{1-k}$

$\overset{\text{Def. 1.2}}{=} \binom{1}{0} \cancel{x}^0 \cancel{y}^{1-0} + \binom{1}{1} \cancel{x}^1 \cancel{y}^{1-1} = \cancel{y} + \cancel{x} = \cancel{x} + \cancel{y}$

↑ Bsp. 2.4 & Def. 1.10 (a) (i) & (ii).

Also ($\square$) ok für $n=1$.

Ind.-annahme: Angenommen ($\square$) gilt für ein (gewisses) $n \in \mathbb{N}$. Müssen zeigen, ($\square$) gilt, mit n (überall!) durch $n+1$ ersetzt.

Wir fangen an:

$(x+y)^{n+1} = (x+y) \cdot (x+y)^n =$

↑ Def. 1.10 (a) (iii) ($n+1 \geq 2$).

$$= (x+y)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{(verwende \underline{Ind.annahme})}$$

$$= x\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \quad \left(\begin{array}{l}\text{Rechenregeln} \\ \text{für Summen (Üb)} \\ \text{+ Def. 1.10 (iii)(a)} \\ \text{\& (i) \& (ii)}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \quad \left(\begin{array}{l}\text{Index verschieben} \\ \text{in 1. Summe} \\ \text{– siehe Üb!}\end{array}\right)$$

$$= \underbrace{\binom{n}{(n+1)-1}}_{=\binom{n}{n}=1} x^{n+1} y^{\overbrace{n-(n+1)+1}^{=0}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Def. 1.2} \\ \text{+ Def. 1.10 (a)} \\ \text{+ Bsp. 2.4}\end{array}\right)$$

$$+ \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} x^0 y^{n-0+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$

$$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{\overset{!}{=}\binom{n+1}{k}} x^k y^{n-k+1} \quad \text{(Siehe Übungen!)}$$

$$= \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k} \quad ; \text{ d.h.}$$

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}$$

D.h.: Haben gezeigt:

Falls (□) gilt für n ("Ind.annahme"), gilt (□) auch für $n+1$.

Per Induktion (d.h. Axiom 1.3) folgt, daß (□) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. ∎

Bsp. 2.8: "Anwendungen":

(a) $$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-2}x^{n-2} + nx^{n-1} + x^n$$
$(x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$

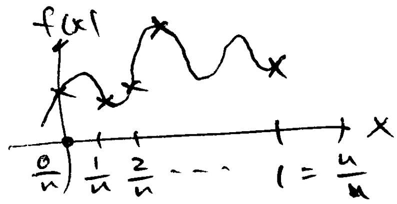
(b) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

(siehe auch Übungen).

(c) (Bernsteinpolynome). Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ Fkt., $n \in \mathbb{N}$

Das Bernsteinpolynom B_n zu f ist

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$ für $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$



Setze $g_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$,
$n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$ $(k \in \mathbb{N})$,
$x \in [0,1]$.

Dann ist $g_{n,k}(x) \geq 0$ (klar) und $\sum_{k=0}^{n} g_{n,k}(x) = 1$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis. Nach dem Binomischen Satz (Satz 2.6) ist

$$\sum_{k=0}^{n} g_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1^n = 1$$ ∎