Section 1: Allgemeines & Induktion

Wir setzen grundlegende Wissen über Zahlen ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) und deren Eigenschaften (Rechenregeln z.B) voraus.

Bemerkung 1.1 Diese werden (ab & zu) im Studium "konstruiert"/definiert (ausgehend von $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$; ab & zu: $0 \in \mathbb{N}$ – hier nicht).

Wir werden auch nicht weiteres über Mengen, und Logik & Beweise (!) explizit sagen (wird auch, eventuel, im Studium im Detail gemacht).

Wir brauchen zuerst eine nützliche Notation:

Definition 1.2 (Summationszeichen) Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (reelle Zahlen). Dann ist

"$\sum_{k=0}^{n} a_k := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$" ("$:=$" : Def.).
(ungenau!).

Formal korrekt:

(i) $\sum_{k=0}^{0} a_k := a_0$

(ii) $\sum_{k=0}^{n} a_k := \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) + a_n \quad (n \geq 1)$

(d.h. $a_0 + a_1 + \dots + a_n := (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) + a_n$
$= \big((a_0 + a_1 + \dots + a_{n-2}) + a_{n-1}\big) + a_n$
$= \dots$ etc $\dots$)

Man sagt, $\sum_{k=0}^{n} a_k$ ist induktiv definiert.

Hat mit Induktion zu tun:

Axiom 1.3 (Induktion) (oder Vollständige Induktion)

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge von natürlichen Zahlen, das erfüllt:

(i) $1 \in A$

(ii) Falls $n \in A$, dann auch $n+1 \in A$

Dann ist $A = \mathbb{N}$ (Induktion = "Dominoeffekt").

("Axiom" $\hat{=}$ "nicht-beweisbare Eigenschaft" / Definition).

Anwendung: Wenn beweisen/zeigen will, "irgendwas" (eine Aussage) gilt für alle natürlichen Zahlen, dann zeige

(i) Es (die Aussage) gilt für $n=1$ ("Induktionsanfang")

(ii) Angenommen, es gilt für ein (gewisses) $n \in \mathbb{N}$ ("Induktionsannahme").
Dann gilt es auch für $n+1$ ("Ind. schritt")

Beispiel 1.4 (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(0+)\quad 1+2+3+\ldots+n := \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (*).$$

Beweis: Per Induktion:

(i) Für $n=1$ ist die Behauptung in $(*)$:

$$\underline{\underline{1}} = \sum_{k=0}^{1} k \overset{?}{=} \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$ – was wahr ist.

(ii) Angenommen $(*)$ gilt für ein (gewisses) $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$(A)\quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$ ist wahr (für dieses n).

Muss zeigen: Dann gilt auch (A) mit n überall (!) durch $n+1$ ersetz

Dann ist

$$1+2+3+\dots+n+(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} k \overset{\text{Def. 1.2 (ii)}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1)$$

$$\overset{(\ast)\,\text{Ind.annahme}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

d.h. $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$, was $(\ast)$ ist, mit $n \rightsquigarrow n+1$

D.h., per Induktion (Axiom 1.3) gilt $(\ast)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ∎

(b) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Beweis: Siehe Übungen!

Wir setzen voraus, das das Funktionenbegriff, und was Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ sind, bekannt ist!

Definition 1.5 Für zwei Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ definieren wir neue Fkt'en $f+g, f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ als

(i) $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $x \in I$

(ii) $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$, $x \in I$

Definition 1.6 Der Betrag von reelle Zahlen ist die Funktion

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty[\quad \text{definiert durch} \quad |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$
$$x \mapsto |x|$$

Bemerkung 1.7 (i) $|x| \geq 0$ immer; $|x| = 0$ dann und nur dann wenn $x = 0$

(ii) $-x \geq 0$ (!) falls $x < 0$.

<u>Lemma 1.8</u> Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (<u>Dreiecksungleichung</u>)

(ii) $|x-y| \leq |x| + |y|$

(iii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

<u>Beweis</u>: Bekannt (!?) – oder siehe Übungen

<u>Lemma 1.9</u> Sei $n \in \mathbb{N}$, und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(\ast) \qquad \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

("Lemma" $\simeq$ (mathematischer) Hilfssatz).

<u>Beweis</u> (von 1.9): Induktion! Ind.anfang: $n = 1$:

$$\left| \sum_{k=0}^{1} a_k \right| \overset{\text{Def. 1.2}}{=} |a_0 + a_1| \overset{\text{Lem. 1.8 (i)}}{\leq} |a_0| + |a_1| \overset{\text{Def. 1.2}}{=} \sum_{k=0}^{1} |a_k| \quad \checkmark \; (\ast) \text{ ok für } n = 1.$$

Angenommen, für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $(\ast)$, d.h.

$$(\ast\ast) \qquad \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

Dann gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{n+1} a_k \right| \overset{\text{Def. 1.2}}{=} \left| \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) + a_{n+1} \right| \overset{\text{Lem. 1.8 (i) mit } x := \sum_{k=0}^{n} a_k,\; y := a_{n+1}}{\leq} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| + |a_{n+1}|$$

$$\overset{(\ast\ast)\text{ Ind.annahme}}{\leq} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) + |a_{n+1}| \overset{\text{Def. 1.2}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} |a_k|$$

– was $(\ast)$ ist (mit $n \rightsquigarrow n+1$). Per Induktion gilt

$(\ast)$ für <u>alle</u> $n \in \mathbb{N}$ $\blacksquare$

Definition 1.10 (a) Wir definieren die Monomien x^n, d.h. die Funktionen $x \mapsto x^n$ $(x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ induktiv:

(i) Für $n=0$, sei $x^0 := 1$ $(x \in \mathbb{R})$

(ii) Für $n=1$, sei $x^1 := x$ $(x \in \mathbb{R})$

(iii) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sei $x^n := x \cdot x^{n-1}$ $(x \in \mathbb{R})$

(Bem.: (i) + (iii) für $n \geq 1$ impliziert (ii) ..)

(b) Für $n \in \mathbb{N}$, und $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $(a_n \neq 0)$ definieren wir das Polynom von Grad n, $P(x)$, als die Funktion

$$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad x \mapsto P(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Lemma 1.11: (a) Es gilt: $x^{m+k} \overset{(\nabla)}{=} x^m \cdot x^k$ für alle $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und alle $x \in \mathbb{R}$

(b) Sei P Polynom von Grad n und Q Polynom von Grad m. Dann ist $P \cdot Q$ (definiert wie in Def. 1.5 (iii)) ein Polynom von Grad $n+m$.

Beweis: (a) Falls $m=0$ oder $k=0$ (oder beides): klar!
Für $m=1$ (und alle k) auch (verwende 1.10 (ii) + (iii)).

Sei also $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ fix. Mache Induktion nach $k \in \mathbb{N}$:

(i) $\underline{k=1}$: $x^{m+k} \overset{k=1}{=} x^{m+1} \overset{\text{Def. 1.10(iii)}}{=} x \cdot x^m \overset{\text{Def. 1.10 (ii)}}{=} x^1 \cdot x^m = x^m \cdot x^k$

Also gilt (∇) für $k=1$.

(ii) Angenommen, $x^{m+k} = x^m \cdot x^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ (Ind.-annahme). $(**)$

Dann ist

$$x^{m+(k+1)} = x^{(m+k)+1} \underset{\substack{\text{Def. 1.10 (iii)} \\ \text{mit } n:=m+k}}{=} x \cdot x^{m+k} \underset{\text{Ind.-annahme } (**)}{=} x \cdot x^m \cdot x^k$$

$$= x^m \cdot x \cdot x^k \underset{\text{Def. 1.10 (iii) } (n:=k).}{=} x^m \cdot x^{k+1}$$

Also gilt $(**)$ für $k+1$. Per Induktion (d.h., nach Axiom 1.3) gilt (v) $\blacksquare$

(b) Siehe Übungen.