

# Studierendenkonferenz der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in München

10. bis 12. März 2010



**Deutsche  
Mathematiker-Vereinigung**



Wir möchten uns ganz herzlich bei allen Gutachtern bedanken.

Auf der Konferenz werden Preise für besonders gute Abschlussarbeiten vergeben. Die Buch-Preise werden vom *Springer-Verlag* gestiftet. Die Gastaufenthalte werden ermöglicht durch

- Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik, Kaiserslautern,
- Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn,
- Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach,
- Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn,
- Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig,
- RWTH Aachen,
- Zuse-Institut Berlin.

Die Preise für die besten Staatsexamensarbeiten wurden von der Konferenz der mathematischen Fachbereiche (KMathF) gespendet.

## Inhalt

Zeitplan	Seite 3
Zusammenfassungen (in alphabetischer Reihenfolge der Nachnamen)	Seite 4-25
Lageplan	Seite 26
gemeinsames Abendessen	Seite 27

## Zeitplan der Studierendenkonferenz

### Mittwoch der 10.03.2010

A U117 (30 Plaezte)	A U121 (20 Plaezte)
<b>14 - 14:15 Uhr: Begrueessung</b>	
14:15 - 15:15 Uhr: Oliver Pfaffel "Optionsbewertung in multivariaten stochastischen Volatilitaetsmodellen" (Finanzmathematik)	14:15 - 15:15 Uhr: Lukas Pottmeyer "Die Dichte quadratfreier Werte ganzzahliger Polynome" (Algebraische Geometrie)
15:15 - 16:15 Uhr: Robert Strehl "Finite Elemente Methoden mit Anwendung auf Probleme der Chemotaxis" (Numerik)	15:15 - 16:15 Uhr: Moritz Schroeer "Der Weil-Steinberg-Charakter endlicher allgemeiner linearer und unitaerer Gruppen" (Algebraische Geometrie)
<b>16:15 – 16:45 Uhr: Pause</b>	
16:45 - 17:45 Uhr: Florian Bossmann "Entwicklung einer automatisierten Auswertung von bildgebenden Ultraschallverfahren" (Angewandte Mathematik)	16:45 - 17:45 Uhr: Danny Tobisch "Ueber die F-Modul-Struktur von Matlis-Dualen lokaler Kohomologiemoduln" (Algebraische Geometrie)
<b>19 Uhr: Gemeinsames Abendessen</b>	

### Donnerstag der 11.03.2010

9 -10 Uhr: Matthias Riedel "Mutually catalytic branching: Behaviour at the boundary and the problem of strong uniqueness" (Stochastik)	9 -10 Uhr: Alexander Hoelzle "Ueber die Existenz von Strong Port Maps zwischen Matroiden" (Mathematische Logik)
<b>10 – 10:30 Uhr: Kaffeepause</b>	
10:30 – 11:30 Uhr: Simon Aumann "Ueber die Anzahl der Stege auf Geodaeten von Hanoi-Graphen" (Stochastik)	10:30 – 11:30 Mike Behrlich "Relational Tame Congruence Theory and Subalgebra Primal Algebras" (Mathematische Logik)
11:30 – 12:30 Uhr: Erich Baur "Metastabilitaet von reversiblen Diffusionsprozessen" (Stochastik)	11:30 – 12:30 Uhr: Manuel Streil "Gromovs h-Prinzip und Metriken mit vorgegebener Krümmung" (Differentialgeometrie)
<b>12:30 – 14 Uhr: Mittagspause</b>	
14 – 15 Uhr: Christina Steinkohl "Analyse von hoch-frequenten Windgeschwindigkeiten mit Hilfe von Zeitreihenanalyse und Extremwerttheorie" (Stochastik)	14 – 15 Uhr: Joachim Breitner "Schleifenuntergruppen von $F_r$ und die Bilder ihrer Stabilisatorgruppen in $GL_r(\mathbb{Z})$ " (Gruppentheorie/Topologie)
15 – 16 Uhr: Florian Alexander Johann Ueltzhoefel "Non-parametric estimation of Lévy densities from observations on a discrete time grid" (Stochastik)	15 – 16 Uhr: Ruben Seyfried "Funktionenräume mit dominierender gemischter Glattheit und Approximation bezüglich des hyperbolischen Kreuzes" (Analysis)
<b>16 – 16:30 Uhr: Kaffeepause</b>	
16:30 – 17:30 Uhr: Andrea Winkler "Das Hard-Core-Modell zur Beschreibung der Energielandschaft eines Glasbildners" (Stochastik)	16:30 – 17:30 Uhr: Thomas Daske "Zur Konstruktion moeglichst duenner Basen" (Analysis)

### Freitag der 12.03.2010

9 -10 Uhr: Martin Kohlmann "Dislocation problems for periodic Schroedinger operators and mathematical aspects of small angle grain boundaries" (Analysis)	9 -10 Uhr: Helmut Krechel "Einfuehrung in stochastische Prozesse - Ein wissenschaftspropaedeutisches Seminar für die Oberstufe des bayerischen achtjaehrigen Gymnasiums" (Didaktik der Mathematik)
10 – 11 Uhr: Philipp Schmalkoke "Spectral Floquet-Bloch Theory for Maxwell's Equations with Periodic and Discontinuous Coefficients" (Analysis)	10 – 11 Uhr: Heike Taut und Natalie Tropper "Analysen zum Interventionsverhalten von Lehrern im Umgang mit Schuelerfehlern in unterschiedlichen kooperativen Lernumgebungen mit mathematischen Modellierungsaufgaben im neunten Schuljahr"
<b>11 – 11:30 Uhr: Kaffeepause</b>	
<b>11:30 – 12 Uhr: Siegerehrung und Verabschiedung (A 017)</b>	

## Zusammenfassungen

– in alphabetischer Reihenfolge der Nachnamen

---

### Über die Anzahl der Stege auf Geodäten von Hanoi-Graphen (Simon Aumann)

Die Diplomarbeit „Über die Anzahl der Stege auf Geodäten von Hanoi-Graphen“ führt den Begriff *Steg* für beliebige Graphen ein. In Hanoi-Graphen sind Stege genau die Kanten, die den Zügen der größten Scheibe im Spiel „Der Turm von Hanoi“ mit  $p$  Stangen und  $n$  Scheiben entsprechen. Es werden kürzeste Wege zwischen zwei beliebigen Ecken der Hanoi-Graphen untersucht: Man betrachtet also beliebige Aufgaben. Im Fall  $p = 3$  wird ein Resultat von Hinz mit einer neuen Methode bewiesen. Auf der Grundlage von Computer-Berechnungen von Ciril Petr werden für beliebiges  $p$  Aussagen über die Existenz von Aufgaben bewiesen, deren kürzeste Lösungswege vorgegebene Anzahlen an Stegen enthalten. Es wird gezeigt, dass eine Geodäte höchstens einen Steg enthält, wenn sie eine perfekte Ecke enthält. Im Hauptresultat dieser Arbeit wird konstruktiv gezeigt, dass es für  $n \geq p(p - 2)$  Aufgaben gibt, deren kürzeste Lösungen  $p - 1$  Züge der größten Scheibe enthalten müssen. Die leicht einzusehende maximale Anzahl von  $p - 1$  Stegen auf einer Geodäte wird also erreicht. Zum Abschluss werden Stege in Hanoi-Graphen mit Stegen in Sierpinski-Graphen verglichen.

---

## Metastabilität von reversiblen Diffusionsprozessen (Erich Baur)

Beobachtet man komplexe dynamische Systeme über einen längeren Zeitraum hinweg, so tritt oft das Phänomen der *Metastabilität* zutage. Wir verstehen darunter die Eigenheit solcher Systeme, pseudostabile Zustände zu besitzen, die häufig sehr unterschiedliche Eigenschaften haben können. Ein pseudostabiler Zustand ist ein Zustand, in dem sich das System über eine lange Zeitspanne hinweg befindet, der aber, nach einer „sehr langen“ Zeit, zugunsten eines anderen Zustandes verlassen werden kann.

Ausgehend von einer Arbeit von Bovier, Eckhoff, Gaynard und Klein [1] untersuchen wir einen Teilaspekt der Metastabilität, nämlich das Verhalten mittlerer Übergangszeiten (Trefferzeiten) zwischen verschiedenen Zuständen. Als zugrunde liegendes Modell betrachten wir Diffusionsprozesse im  $\mathbb{R}^d$ , die gegeben sind als Lösungen von SDEs der Form

$$dX_t = -\nabla F(X_t)dt + \sqrt{2\epsilon}dB_t$$

Dabei wird der Drift  $-\nabla F$  von einer (reellwertigen) Potentialfunktion  $F$  mit endlich vielen lokalen Minima erzeugt, und  $B_t$  ist eine  $d$ -dimensionale Brownsche Bewegung. Da typischerweise der Einfluss der Störung sehr klein ist, sind wir an der Asymptotik  $\epsilon \downarrow 0$  interessiert.

Größen wie Trefferwahrscheinlichkeiten oder Übergangszeiten sind gegeben als Lösungen von Randwertproblemen. Wir beweisen die Existenz von Lösungen auf unbeschränkten Gebieten und erläutern deren stochastische Bedeutung. Da wir jedoch explizite Lösungen nur im Eindimensionalen berechnen können, folgen wir dem potentialtheoretischen Zugang von [1]. Dieser ermöglicht es, mittlere Übergangszeiten in Form von (Newtonschen) Kapazitäten zwischen bestimmten Mengen auszudrücken. Die Kapazitäten ihrerseits können durch ein Variationsprinzip näher bestimmt werden. Mit diesen Methoden sind wir in der Lage, Trefferzeiten hinreichend regulärer Mengen bei Start in einem Potentialminimum bis auf einen multiplikativen Fehler der Größenordnung  $1 + O(\epsilon^{1/2} |\ln \epsilon|^{3/2})$  zu berechnen. Wir arbeiten die in [1] vorgestellten Methoden auf und verallgemeinern die Resultate.

[1] Anton Bovier, Michael Eckhoff, Véronique Gaynard, Markus Klein: *Metastability in reversible diffusion processes I. Sharp asymptotics for capacities and exit times*, J. Eur. Math. Soc. 6, 399-242 (2004).

---

# Relational Tame Congruence Theory and Subalgebra Primal Algebras (Mike Behrisch)

In den 1980er Jahren entstand mit der so genannten Tame Congruence Theory“ (TCT) eine Strukturtheorie für endliche Algebren, mit deren Hilfe sich durch lokale Untersuchung sehr tiefliegende Erkenntnisse über den Aufbau endlicher algebraischer Strukturen gewinnen lassen. Aufbauend auf Ideen von K. Kearnes entwickelt die vorliegende Arbeit die Grundlagen für eine verallgemeinernde Variante der TCT, die so genannte „relationale TCT“ (RTCT), welche es erlaubt, endliche Algebren anhand aller ihrer invarianten Relationen zu analysieren, während die klassische TCT nur bestimmte zweistellige Relationen, so genannte Kongruenzrelationen, zur Lokalisierung benutzt. Dies ermöglicht, im Gegensatz zur klassischen TCT, eine Zerlegung von Algebren in fundamentale Bestandteile (unzerlegbare Algebren), aus denen sie sich in gewissem Sinne vollständig rekonstruieren lassen.

Konkret werden in der vorliegenden Arbeit u. a. folgende Probleme betrachtet und gelöst: Es werden bestimmte Teilmengen einer Algebra identifiziert (so genannte Umgebungen), so dass die Einschränkungabbildung auf eine Umgebung verträglich ist mit der Klonstruktur auf den invarianten Relationen. Davon ausgehend werden Lokalisierungen (Einschränkungen) von Algebren auf Umgebungen definiert, und es wird charakterisiert, welche Systeme von Umgebungen (Überdeckungen) ausreichen, um eine gegebene Algebra aus den zugehörigen Einschränkungen bis auf Termäquivalenz wieder vollständig zu rekonstruieren. Jede endliche Algebra besitzt dabei bis auf Isomorphie genau eine irredundante nichtverfeinerbare Überdeckung, die nur aus so genannten irreduziblen Umgebungen besteht. Die davon abgeleiteten irreduziblen Algebren bilden somit aus Sicht der RTCT die Bausteine aller endlichen Algebren und werden im zweiten Teil der Arbeit für bekannte Algebrenklassen, darunter Verbände und Halbverbände, Boolesche Algebren, Gruppen, Vektorräume und so genannte unteralgebraprimale Algebren, untersucht und bestimmt.

---

## Entwicklung einer automatisierten Auswertung von bildgebenden Ultraschallverfahren (Florian Boßmann)

Heutzutage werden in der Industrie zur Prüfung von Werkstücken meist automatisierte Verfahren eingesetzt. Speziell bei der Prüfung von Schweißnähten an Stahlrohren arbeitet man hierbei oftmals mit Ultraschalltechniken. Die bildgebenden Verfahren liefern dabei eine Graustufen-Matrix zurück, welche nun durch einen Algorithmus interpretiert werden muss.

Die zur Zeit angewandten Algorithmen besitzen den Nachteil, dass nicht alle gegebenen Informationen genutzt werden. So wird die Bildmatrix z.B. oft nur spaltenweise verarbeitet ohne die zeilenweisen Zusammenhänge zu berücksichtigen. Die Diplomarbeit beschäftigt sich daher mit der Entwicklung eines neuartigen Verfahrens zur Auswertung dieser Matrizen unter Einbeziehung der zugrunde liegenden physikalischen Verhältnisse. Dieses Verfahren lässt sich in drei grundlegende Schritte unterteilen: Zuerst muss die vorliegende Matrix von Rauschsignalen und anderen Störungen befreit werden. In diesem Schritt wird neben der Wavelet-Transformation auch auf andere Verfahren der Bildverarbeitung zurückgegriffen. Die Schwierigkeit besteht darin, dass die relevanten Daten nur geringe Amplituden aufweisen und sich nur wenig von den Rauschsignalen unterscheiden.

Im zweiten Schritt wird ein neuer inverser Operator angewendet, welcher in dieser Diplomarbeit aus einem speziell konstruierten physikalischen Modell des Verfahrens hergeleitet wurde. Dieses Modell basiert auf Prinzipien der Geometrie und Strahlenoptik. Es beschreibt die Entstehung der Bildmatrix aus einer gegebenen Schweißnaht. Mit Hilfe des inversen Operators kann diese Schweißnaht aus der (vorbearbeiteten) Bildmatrix rekonstruiert werden.

Im dritten Schritt lassen sich mittels Mustererkennungsmethoden Position, Form und Größe der rekonstruierten Fehler bestimmen.

---



# Schleifenuntergruppen von $F_r$ und die Bilder ihrer Stabilisatorgruppen in $GL_r(\mathbb{Z})$ (Joachim Breitner)

Es werden Untergruppen  $U$  der freien Gruppe in  $r \geq 3$  Erzeugern betrachtet, deren Nebenklassengraph eine bestimmte Form besitzt, die bezeichnenderweise aus Schleifen besteht. Zu solchen Untergruppen wird das Bild ihrer Stabilisatorgruppe in  $GL_r(\mathbb{Z})$  berechnet:  $B(\text{Stab}_{\text{Aut}(F_r)}(U))$ . Dabei ist  $B: \text{Aut}(F_r) \rightarrow GL_r(\mathbb{Z})$  der Gruppenhomomorphismus, der von der Abelianisierung  $F_r \rightarrow \mathbb{Z}^r$  induziert wird.

Diese Fragestellung ist motiviert durch den Fall  $r = 2$ : Hier tritt diese Konstruktion bei der Berechnung von Veech-Gruppen von Origamis auf. Es stellt sich heraus, dass sich die Fälle  $r = 2$  und  $r \geq 3$  deutlich unterscheiden.

Es wird gezeigt, dass für eine Schleifenuntergruppe  $U$  die Untergruppe  $B(\text{Stab}_{\text{Aut}(F_r)}(U)) \leq GL_r(\mathbb{Z})$  eine Kongruenzuntergruppe mit Level 2 ist. Als Untergruppe von  $GL_r(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  betrachtet ist sie der Stabilisator eines Zeilenvektors  $v \in (\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^r$  unter der Multiplikation von rechts.

Auf ähnlichem Wege wird gezeigt, dass für die Untergruppen  $U \leq F_r$  von Index 2 die selben Gruppen als Bilder ihrer Stabilisatorgruppen unter  $B$  auftreten.

In einem algorithmischen Teil der Arbeit wird der bekannte Todd-Coxeter-Algorithmus zur Berechnung des Nebenklassengraphen einer Untergruppe in einer endlich präsentierten Gruppe erläutert. Ein weiter Algorithmus, genannt CosetProject, der das Bild eines Nebenklassengraphen unter einer Projektion zwischen endlich präsentierten Gruppen berechnet, wird vorgestellt und analysiert. Mit dessen Hilfe kann  $B(\text{Stab}_{\text{Aut}(F_r)}(U))$  für kleine  $r$  und kleine Untergruppenindizes berechnet werden.

---

## Zur Konstruktion möglichst Dünnere Basen (Thomas Daske)

Eine Teilmenge  $\mathcal{A}$  von  $\mathbb{N}$  heisst *additive Basis der Ordnung 2* (kurz *Basis*), wenn  $\mathcal{A} + \mathcal{A} = \mathbb{N}$  gilt. Gegenstand dieser Arbeit ist die Konstruktion *möglichst dünner gleichmässig dünner* Basen. - Das sind Basen  $\mathcal{A}$ , für deren Zählfunktion

$$\pi_{\mathcal{A}} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto |\{a \in \mathcal{A} \mid a \leq x\}| \end{cases}$$

der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{\mathcal{A}}(x)}{\sqrt{x}}$$

existiert.

Einführend werden verschiedene mehr oder weniger naheliegende Ansätze zur Konstruktion solcher Basen auf ihre Brauchbarkeit untersucht. Anschliessend wird das Konstruktionsprinzip aus der Dissertation von C. Schmitt aus dem Jahre 2005 verallgemeinert.

Nach diesem Konstruktionsprinzip werden geeignete arithmetische Progressionen zu einer Menge  $\mathcal{A}'$  vereinigt und diese dann um die Elemente einer geeigneten Menge  $\mathcal{A}''$  zu einer gleichmässig dünnen Basis  $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$  ergänzt. Schmitt gelang so die Konstruktion einer gleichmässig dünnen Basis  $\mathcal{A}$  mit (dem gegenwärtig besten bekannten Resultat)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{\mathcal{A}}(x)}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{3} = 3,46\dots$ .

Aus der Verallgemeinerung seines Ansatzes heraus wird schliesslich unter Verwendung der *Fibonacci-Zahlen* und des *goldenen Schnitts* die Existenz einer gleichmässig dünnen Basis  $\mathcal{F}$  mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_{\mathcal{F}}(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{5} + 1 = 3,23$  *vermutet* und diese Vermutung teils bewiesen, teils numerisch gerechtfertigt.

---

## Über die Existenz von Strong Port Maps zwischen Matroiden (Alexander Hölzle)

Ein Graph-Homomorphismus ist eine Abbildung  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  zwischen den Knotenmengen der Graphen  $G$  und  $H$ , falls diese die Adjazenz der Knotenpaare respektiert ([HN04]). Insbesondere J. NESETRIL studierte die durch die Graph-Homomorphismen induzierte Homomorphismen-Ordnung und zeigte gemeinsam mit C. TARDIF in [NT9], dass die Homomorphismen-Ordnung dicht ist, d.h. dass für je zwei Graphen  $\{G, H\} \neq \{K_1, K_2\}$  mit  $G \rightarrow H$  und  $H \not\rightarrow G$  stets ein weiterer Graph  $X$  existiert, so dass  $G \rightarrow X \rightarrow H$  und  $H \not\rightarrow X \not\rightarrow G$ . Dieses Resultat hängt eng damit zusammen, dass es bei Graphenhomomorphismen keine nicht-trivialen Homomorphie-Dualitäten gibt, wie von den gleichen Autoren gezeigt wurde.

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen bildet die Arbeit [HN00], in der W. HOCHSTÄTTLER und J. NESETRIL zeigen, dass man den Menger'schen Satz als Homomorphismen-Dualität für Strong Port Maps auf den regulären Matroiden interpretieren kann. Eine Konsequenz dieses Resultats ist es, dass die Homomorphismen-Ordnung dieser Kategorie eine nicht-triviale Kette ist. In unserer Arbeit untersuchen wir die Struktur der Homomorphismen-Ordnung allgemeinerer Klassen von Matroiden mit Strong Port Maps als Homomorphismen.

In Abschnitt IV.2.2 gehen wir der Frage nach der Existenz von Strong Port Maps zwischen projektiven Räumen nach und beweisen unter anderem, dass es keine Strong Port Map von  $PG(n+1, q)$  nach  $PG(n, q)$  gibt, wobei  $n$  die Dimension des projektiven Raumes über dem endlichen Körper  $IF_q$  ist. Zudem untersuchen wir das Verhältnis zwischen Kreisen und Cokreisen eines projektiven Raumes sowie der Existenz einer Strong Port Map. So ergibt sich daraus, dass für  $n \geq 2$  und  $k \geq 3$  keine Strong Port Map von  $PG(n, q)$  in den Kreis  $C_k$  existiert. Neben den projektiven werden die uniformen Matroide eine bedeutende Rolle einnehmen. Mit einigen vorbereitenden Resultaten gelingt es uns im Satz IV.2.26 eine unendlichen Antikette in der Homomorphismen-Ordnung auf uniformen Matroiden zu konstruieren. Ferner wird ebenfalls mit Hilfe von uniformen Matroiden nachgewiesen, dass es zu jedem vorgegebenem nicht-trivialen Matroid Port  $M$  stets ein unvergleichbares Gegenstück  $M'$  gibt, so dass  $M \not\rightarrow M'$  und  $M' \not\rightarrow M$ . Abschließend zeigen wir die Wirkung der parallelen Summe auf die Existenz einer Strong Port Map auf, was für das offene Problem der Dichte der durch die Strong Port Maps induzierten Hom-Ordnung von Bedeutung sein könnte.

Neben den grundlegenden Arbeiten [Hig68] und [Cra67] führen [Kung86] sowie [Cra70] in die Theorie der Strong Maps ein. Mit dem Thema Strong Port Maps befassen sich abgesehen von [HN00] die Arbeiten [AH03] und [AH04].

---

## Dislocation problems for periodic Schrödinger operators and mathematical aspects of small angle grain boundaries (Martin Kohlmann)

In der mathematischen Physik werden perfekt periodische Festkörper mit Hilfe von periodischen Schrödinger-Operatoren modelliert. Reale Kristallgitter weisen jedoch verschiedene Typen kristallographischer Defekte auf. Beispielsweise kann das Kristallpotential die Form  $V(x) = V_\ell(x)\chi_{\{x<0\}} + V_r(x)\chi_{\{x>0\}}$ ,  $V_\ell, V_r$  periodisch, haben, so dass bei  $x = 0$  eine Grenzschicht entsteht. In dieser Arbeit werden mathematische Modelle für Dislokationsdefekte in einer und in zwei Raumdimensionen sowie ein zweidimensionales Modell für eine Kleinwinkelkorngrenze studiert. Wir beginnen mit einem eindimensionalen Dislokationsproblem mit  $V_r \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  und  $V_\ell(x) = V_r(x+t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, 1) \simeq \mathbb{T}^1$ , und beweisen, daß gebundene Zustände in den Spektrallücken des periodischen Problems auftreten. Wir zeigen, daß die Trajektorien dieser Eigenwerte als Funktionen von  $t$  im Inneren einer Lücke durch eine abzählbare Familie stetiger Funktionen beschrieben werden. Für verschiedene Potentialklassen diskutieren wir Regularitätseigenschaften der Eigenwertzweige. Weiterhin beweisen wir, daß sich bei jedem Durchlauf  $t \in \mathbb{T}^1$  effektiv  $k$  Eigenwerte durch die  $k$ -te Lücke des wesentlichen Spektrums bewegen. Für ein periodisches 1D-Stufenpotential berechnen wir unter Verwendung von Floquet-Theorie und Mathematica einen Eigenwertzweig. Anschließend studieren wir ein 2D-Dislokationsproblem mit  $V_r$  Lipschitz-stetig auf dem Streifen  $\mathbb{R} \times (0, 1)$  und zeigen unter Verwendung von Abschneidetechniken, daß für  $t \in \mathbb{T}^1$  Eigenwerte durch die Lücken des wesentlichen Spektrums laufen. Unter Verwendung von direkten Faserintegralen erhalten wir ein ähnliches Ergebnis für den Dislokationsoperator in  $L_2(\mathbb{R}^2)$ . Als Beispiel studieren wir ein zweidimensionales Muffin Tin Potential. Wir verwenden unsere Ergebnisse, um ein zweidimensionales Defektmodell mit  $V_r$  Lipschitz stetig,  $V_\ell = V_r \circ M_\vartheta$ , wobei  $M_\vartheta$  eine Drehmatrix zum Winkel  $\vartheta$  ist, zu untersuchen. Unter Verwendung des Birkhoffschen Ergodensatzes beweisen wir, daß sich die Spektrallücken des periodischen Problems für  $\vartheta \rightarrow 0$  mit Spektrum füllen; für spezielle Winkel zeigen wir weiter, daß dieses Spektrum absolutstetig ist. Schließlich bestimmen wir unter sehr allgemeinen Voraussetzungen Abschätzungen für die Zustandsdichte der Oberflächenzustände für zweidimensionale Defektmodelle vom oben beschriebenen Typ (ohne die Existenz einer Zustandsdichte im allgemeinen Fall zu begründen).

---

## **Einführung in stochastische Prozesse - Ein wissenschaftspropädeutisches Seminar für die Oberstufe des bayerischen achtjährigen Gymnasiums (Helmut Krechel)**

Diese Zulassungsarbeit richtet sich an Mathematiklehrerinnen und -lehrer am Gymnasium, die sich für das Thema „Stochastische Prozesse“ als Rahmenthema eines wissenschaftspropädeutischen Seminars (W-Seminar) mit Leitfach Mathematik im Rahmen der neuen Oberstufe des 8-jährigen bayerischen Gymnasiums interessieren. Die Arbeit gliedert sich, nach einer kurzen Vorstellung der Idee des W-Seminars mit den Besonderheiten beim Leitfach Mathematik, in zwei Teile. Im ersten Abschnitt werden die stochastischen Prozesse mathematisch mit ihren Eigenschaften und dem benötigten Vorwissen dargestellt, im zweiten Abschnitt folgt dann die didaktische Einordnung des Themas in den Rahmen des W-Seminars. Nach einer kurzen Darstellung der benötigten mathematischen Hilfsmittel wird im ersten Teil der Arbeit der stochastische Prozess allgemein definiert und dann werden vier verschiedene stochastische Prozesse vorgestellt. Am Poisson-Prozess werden noch einmal die wichtigsten Elemente der allgemeinen Definition erläutert und graphisch dargestellt sowie verschiedene Anwendungen wie der Compound-Poisson-Prozess vorgestellt. Der Poisson-Prozess bildet im Rahmen der Arbeit eine Schlüsselstelle, da dieser grundlegend für zwei andere Prozesstypen innerhalb dieser Arbeit ist. Als weitere Gruppe stochastischer Prozesse werden die Verzweigungsprozesse vorgestellt und ihre Bedeutung anhand des Galton-Watson-Prozess verdeutlicht. Innerhalb der Darstellung wird auch auf das praktische Werkzeug der erzeugenden Funktion eingegangen. Für begabtere Schülerinnen und Schüler werden stochastische Wachstumsprozesse eingeführt und ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit und ihr Langzeitverhalten untersucht. Als Grundlage dienen hierbei und im Folgenden einige Kapitel des Buches „*Lecture notes in particle Systems and Percolation*“ von Richard Durrett, dessen Darstellungen in dieser Arbeit für die Zielgruppe verständlich ausgeführt und graphisch illustriert wurden. Als letzter stochastischer Prozess werden das Voter-Modell und seine Eigenschaften behandelt. Dabei wird das Voranschreiten des Prozesses auf das Verhalten einer verschmelzenden Irrfahrt zurückgeführt und in einem kleinen Exkurs die Eigenschaften von stochastischen Irrfahrten in verschiedenen Dimensionen dargestellt. Im zweiten Teil wird nun der mathematische Inhalt auf seine Eignung als Thema eines W-Seminars überprüft. Dies geschieht anhand der „Didaktischen Analyse“ nach Wolfgang Klafki, dem Fachprofil des Faches Mathematik im Lehrplan des bayerischen Gymnasiums und den von der Kultusministerkonferenz formulierten einheitlichen Prüfungsanforderungen des Faches Mathematik in der Sekundarstufe II. Es wird weiterhin ein konkreter Ablaufplan für ein solches W-Seminar mit dem Thema „Stochastische Prozesse“ entwickelt (Kurzfassung als Formular im Anhang) und auf die möglichen didaktischen Probleme bei dessen Umsetzung eingegangen. Nach einer kurzen Darstellung von 17 möglichen Seminararbeitsthemen wird abschließend die Eignung des Themas „Stochastische Prozesse“ als ein Rahmenthema eines W-Seminars diskutiert.

---

# Optionspreisbewertung in multivariaten stochastischen Volatilitätsmodellen (Oliver Pfaffel)

Ziel dieser Diplomarbeit ist es Optionen, deren Auszahlung von mehreren Wertpapieren abhängt, zu bewerten. Beispiele dafür sind Basket und Spread Optionen. Hierzu sei  $L$  ein Matrix-Subordinator, d.h. ein matrixwertiger Lévy-Prozess mit positiv semidefiniten Zuwächsen, und  $W$  ein von  $L$  unabhängiger Wiener-Prozess im  $\mathbb{R}^d$ . Als Modell für die Preisprozesse  $e^Y := (e^{Y^1}, \dots, e^{Y^d})$  von  $d$  zugrundeliegenden Wertpapieren verwenden wir

$$\begin{aligned}dY_t &= (\mu + \beta(\Sigma_t)) dt + \Sigma_t^{\frac{1}{2}} dW_t + \rho(dL_t) \\d\Sigma_t &= (A\Sigma_t + \Sigma_t A^T) dt + dL_t,\end{aligned}$$

wobei  $\mu \in \mathbb{R}^d$ ,  $A \in M_d(\mathbb{R})$  eine reelle  $d \times d$  Matrix und  $\beta, \rho : M_d(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^d$  lineare Operatoren sind. Dieses Modell ist so in der Lage die komplexen Abhängigkeiten (z.B. stochastische Korrelationen) der unterschiedlichen Wertpapiere zu erfassen.

Zuerst bestimmen wir die charakteristische Funktion von  $Y_t$ . Sodann zeigen wir, dass sich diese auf einem Streifen um  $0 \in \mathbb{C}^d$  analytisch fortsetzen lässt, falls  $L$  ausreichende exponentielle Momente besitzt. Dies ermöglicht die Bewertung einer großen Klasse von Optionen mit Hilfe von Integraltransformationmethoden. Weiterhin bestimmen wir Martingalbedingungen für  $(e^{Y_t - rt})_{t \in \mathbb{R}_+}$  und eine Teilmenge von äquivalenten Martingalmaßen, die die Struktur unseres Modells erhalten.

Wir stellen außerdem ein konkretes Modell vor, in dem  $L$  ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Wishartverteilten Sprüngen ist. In diesem sogenannten OU-Wishart Modell sind die eindimensionalen Ränder in Verteilung gleich dem populären  $\Gamma$ -OU BNS Modell. Schließlich zeigen wir, dass sich unser Modell stabil und schnell an Marktpreise kalibrieren lässt.

---

## Die Dichte quadratfreier Werte ganzzahliger Polynome (Lukas Pottmeyer)

Diese Arbeit behandelt eine weniger bekannte Folgerung der *abc*-Vermutung. Paul Erdős vermutete, dass jedes ganzzahlige Polynom ohne doppelte Nullstelle, welches keinen fixierten quadratischen Teiler besitzt, unendlich viele quadratfreie Werte annimmt. Sogar, dass die Dichte dieser Werte in der Wertemenge des Polynoms positiv ist. Dies bedeutet, dass für ein solches  $f \in \mathbb{Z}[x]$  eine positive Konstante  $c(f)$  existiert, mit der gilt  $|\{0 \leq n \leq y \mid f(n) \text{ quadratfrei}\}| \sim c(f)y$ . Diese Vermutung ist nur für Polynome vom Grad kleiner gleich Drei gelöst und ein Beweis für lineare und quadratische Polynome findet sich in dieser Arbeit. Weiter wird in der Arbeit ein Beweis von Andrew Granville vorgestellt, der zeigt, dass sich die Vermutung von Erdős beweisen lässt unter der Annahme, dass die *abc*-Vermutung stimmt. Der Hauptteil der Arbeit ist eine Verallgemeinerung dieses Resultats für Polynome mit ganz-algebraischen Koeffizienten. Es wird also nicht mehr  $\mathbb{Q}$  als Grundkörper genommen, sondern ein beliebiger Zahlkörper  $K$  und die betrachteten Polynome stammen aus dem Polynomring über dem Ring der ganzalgebraischen Zahlen in  $K$ , der mit  $\mathfrak{o}_K[x]$  bezeichnet wird. Um Erdős Vermutung auch für diese Polynome zu beweisen, wird eine auf algebraische Zahlen verallgemeinerte geometrische Version der *abc*-Vermutung vorausgesetzt. Mit dieser Annahme wird bewiesen:

**Granvilles Theorem für beliebige Zahlkörper:** Sei  $K$  ein Zahlkörper vom Grad  $n$  und  $f(x) \in \mathfrak{o}_K[x]$  ein quadratfreies Polynom. Weiter existiere kein Primideal  $P \triangleleft \mathfrak{o}_K$ , so dass  $f(a) \in P^2$  für alle  $a \in \mathfrak{o}_K$ . Unter Voraussetzung der *abc*-Vermutung für Zahlkörper gilt

$$|\{a \in \mathfrak{o}_K \mid \|a\| \leq y, f(a) \notin P^2 \text{ für alle Primideale } P \triangleleft \mathfrak{o}_K\}| \sim c(f)c(K)y^n$$

für eine Konstante  $c(f) > 0$ , einen geeigneten Betrag  $\|\cdot\|$  und eine Konstante  $c(K)$ , die explizit berechnet werden kann.

---

# Mutually catalytic branching: Behaviour at the boundary and the problem of strong uniqueness.

(Matthias Riedel)

In dieser Diplomarbeit beschäftigen wir uns mit dem Randwertverhalten des zweidimensionalen Prozesses des Wechselseitig katalytischen Verzweigens (Mutually catalytic branching). Dieser gehorcht der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ_{i,t} = a_i(b_i - Z_{i,t})dt + \sqrt{\gamma Z_{1,t}Z_{2,t}} dW_{i,t} \quad i = 1, 2.$$

Dabei sind  $a_i, b_i, \gamma > 0$  und  $W_{i,t}$  zwei unabhängige Brownsche Bewegungen. Für diesen ist die Frage der pfadweisen Eindeutigkeit und damit die Existenz starker Lösungen ein offenes Problem. Wir erläutern zunächst warum es Grund zu der Annahme gibt, dass die Betrachtung des Randwertverhaltens in diesem Zusammenhang von Nutzen sein könnte.

Im Weiteren beweisen wir, dass dieser  $(\mathbb{R}_0^+)^2$ -wertige Prozess an den positiven Halbachsen ein sehr interessantes Verhalten zeigt: Es existieren zwei Konstanten (abhängig von den Modellparametern), so dass der Prozess die Halbachsen nur ab diesen Konstanten trifft, dort allerdings f.s.. Der Beweis beruht im wesentlichen auf einem Vergleich mit dem eindimensionalen Cox-Ingersoll-Ross-Prozess, dessen Randwertverhalten bekannt ist, nach Einschränkung auf gewisse Kompakta (durch Betrachtung gestoppter Prozesse) und nach Wahl geeigneter Transformationen.

Zuletzt erläutern wir Methoden mit denen es möglich ist dieses spezifische Verhalten durch Simulationen zu veranschaulichen. Das stochastische Euler-Verfahren, bei dem es zu Problemen bei der Simulation von Prozessen mit nicht Lipschitz-stetigen Koeffizienten kommt, wird durch eine geeignete Transformation des Raumes ergänzt.

---



# Spectral Floquet-Bloch Theory for Maxwell's Equations with Periodic and Discontinuous Coefficients (Philipp Schmalkoke)

In der vorliegenden Diplomarbeit wird das spektrale Problem für die Maxwellgleichungen betrachtet, wie es im Zusammenhang mit photonischen Kristallen auftritt (vgl. [1]). Bei dielektrischen Strukturen dieser Art ist die Permittivitätsfunktion  $\varepsilon : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  (räumlich) periodisch und insbesondere unstetig, da sich die Periodizitätszelle  $\Omega$  eines photonischen Kristalls im Modell aus Material mit  $\varepsilon \equiv \text{const.} > 1$  und Vakuum ( $\varepsilon \equiv 1$ ) zusammensetzt. Mathematisch wird dem durch die schwache Forderung  $\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$  Rechnung getragen, welche zusammen mit der Zulassung unbeschränkter Periodizitätszellen - um beispielsweise auch Wellenleiter zu berücksichtigen - die Schwierigkeit der Fragestellung ausmacht.

Probleme mit periodischen Koeffizienten wie das obige werden spektraltheoretisch üblicherweise mittels der *Floquet-Bloch-Theorie* analysiert. Deren Hauptaussage ist, dass sich die spektralen Eigenschaften einer geeigneten operatortheoretischen Realisierung des Problems auf dem Ganzraum  $\mathbb{R}^3$  aus dem Verhalten auf einer Periodizitätszelle gewinnen lassen (vgl. [1]). Man spricht in diesem Zusammenhang von einer *Bandlückenstruktur* des Spektrums. Ein Beweis dieser spektralen Zerlegung im Kontext der Maxwellgleichungen unter den oben genannten Voraussetzungen an  $\varepsilon$  und  $\Omega$  stellte die genaue Aufgabenstellung der Diplomarbeit dar. Die Unstetigkeiten in den Koeffizienten erschweren die Anwendung der "üblichen" Floquet-Bloch-Theorie in  $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ . Diese Schwierigkeit wurde mit einer dem Problem zugehörigen Bilinearform und deren selbstadjungierter Realisierung in einem geeigneten Dualraum überbrückt.

Ausgangspunkt der Überlegungen war die Vorarbeit [2] über elliptische Probleme mit unstetigen Koeffizienten. Die mit einem Maxwell-Problem verbundene Forderung der Divergenzfreiheit der betrachteten Funktionen erforderte die vielfältige Weiterentwicklung und Anpassung dieser Resultate.

Die Diplomarbeit wurde von Prof. Dr. Michael Plum, Koautor von [2], am Institut für Analysis der Universität Karlsruhe (TH) betreut und stellt neue Ergebnisse zur Spektraltheorie von periodischen Maxwell-Problemen bereit. Eine Veröffentlichung als Artikel ist in Vorbereitung.

- 
- [1] P. KUCHMENT: The mathematics of photonic crystals. In: *Front. Appl. Math.*, Band 22, Seiten 207–272. SIAM, Philadelphia, PA, 2001.
- [2] M. BROWN, V. HOANG, M. PLUM und I. G. WOOD: Floquet-Bloch theory for elliptic problems with discontinuous coefficients. Eingereicht, 2009.
-

# Der Weil-Steinberg-Charakter endlicher allgemeiner linearer und unitärer Gruppen (Moritz Schröer)

Meine Arbeit befasst sich mit Darstellungstheorie, einem wichtigen Instrument zum Verständnis von Gruppen. Die Idee ist, dass Gruppen durch Matrizen (in der gewöhnlichen Darstellungstheorie über den komplexen Zahlen) realisiert werden. Genauer nennt man für eine endliche Gruppe  $G$  einen Homomorphismus  $\mathcal{X}: G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  eine Darstellung von  $G$  vom Grad  $n$ . Grundlegende Resultate der Darstellungstheorie liefern, dass es bis auf (simultane) Konjugation lediglich endlich viele irreduzible Darstellungen von  $G$  gibt, also solche, die sich nicht in Blockdiagonalgestalt konjugieren lassen. Weiter ist jede Darstellung  $\mathcal{X}$  bereits durch ihren Charakter  $G \rightarrow \mathbb{C}: g \mapsto \mathrm{Spur}(\mathcal{X}(g))$  bis auf Konjugation eindeutig bestimmt, so dass die Betrachtung dieser recht einfachen, auf den Konjugiertenklassen konstanten Funktionen für viele Fragestellungen bereits ausreicht.

In einer gemeinsamen Arbeit haben Hiss und Zalesskii den WEIL-STEINBERG-Charakter für endliche lineare, unitäre und symplektische Gruppen als Produkt des WEIL- mit dem STEINBERGcharakter eingeführt. Die Fragestellung, die meiner Arbeit zugrundeliegt, ist, wie sich dieser Charakter als Summe von irreduziblen schreiben lässt. Dies habe ich für lineare und unitäre Gruppen ausgerechnet.

Wie man die irreduziblen Charaktere besagter Gruppen vollständig parametrisieren kann, ist dabei bereits bekannt. Es gibt zwei Wege, dies zu tun: LUSZTIG-Parametrisierung und HARISH-CHANDRA-Parametrisierung. Beide werden benötigt und das Verständnis letzterer ist wesentlich für die bearbeitete Fragestellung, da die ihr zugrundeliegenden Ideen die Werkzeuge zur Bestimmung der irreduziblen Konstituenten liefern. Bei dieser Parametrisierung werden die Charaktere durch sogenannte *kuspidale* Charaktere gewisser Untergruppen gelabelt; zu jedem solchen kuspidalen Charakter definiert man eine relative WEYLgruppe. Bei diesen handelt es sich um vergleichbar überschaubare Gruppen. Die ursprüngliche Aufgabe lässt sich, aufbauend auf die Resultate von Hiss und Zalesski, auf die Darstellungstheorie dieser Gruppen zurückführen.

---

## Funktionenräume mit dominierender gemischter Glattheit und Approximation bezüglich des hyperbolischen Kreuzes (Ruben Seyfried)

Diese Arbeit beschäftigt sich mit den Funktionenräumen von verallgemeinerter dominierender gemischter Glattheit und deren Beziehungen zur Approximation bezüglich des hyperbolischen Kreuzes. Dazu führen wir die Triebel-Lizorkin-Räume  $S_{p,q}^{r,\alpha} F(\mathbb{R})$  und Besov-Räume  $S_{p,q}^{r,\alpha} B(\mathbb{R})$  auf Fourieranalytischer Grundlage ein und studieren zunächst deren Eigenschaften. Als Hauptresultat sind Beziehungen zwischen diesen Räumen und der Approximation bezüglich des hyperbolischen Kreuzes gezeigt.

Wir definieren für  $m \in \mathbb{N}_0$  die Menge

$$H_m := \{(\xi_1, \xi_2) : \exists r \in \{0, \dots, m\}, \text{ so dass } |\xi_1| \leq 2^r \pi \text{ und } |\xi_2| \leq 2^{m-r} \pi\}$$

als dyadisches hyperbolisches Kreuz der Ordnung  $m$  und setzen

$$S_m^H f(x) := F^{-1} [\chi_m^H F f](x),$$

wobei  $\chi_m^H$  die charakteristische Funktion von  $H_m$  ist und  $F, F^{-1}$  die Fouriertransformation bzw. deren Inverse bezeichnen. Offensichtlich ist  $S_m^H f$  eine ganze analytische Funktion von Exponentialtyp, deren Fouriertransformierte einen Träger in  $H_m$  hat. Die Approximation von  $f$  durch  $S_m^H f$  wird auch als eine Approximation bezüglich des hyperbolischen Kreuzes bezeichnet. Entsprechende Approximationsräume wurden in den vergangenen Jahrzehnten intensiv studiert, beispielhaft liefert [?, Theorem 11] für  $1 < p < \infty$  und  $r > 0$  das Resultat

$$\|I - S_m^H : S_{p,\infty}^r B(\mathbb{R}) \rightarrow L_p(\mathbb{R})\| \sim 2^{-rm} m^{\frac{1}{\min(p,2)}}.$$

Hierbei bezeichnet die linke Seite die Norm des Operators  $I - S_m^H$  ( $I$  identischer Operator), betrachtet als Abbildung von dem Besov-Nikol'skij-Raum  $S_{p,\infty}^r B(\mathbb{R})$  in den Raum  $L_p(\mathbb{R})$ .

Wir beschäftigen uns mit der Frage, ob durch Forderung zusätzlicher „logarithmischer“ Glattheit eine Verbesserung des asymptotischen Verhaltens erreicht werden kann und der Faktor  $m^{1/p}$  bzw.  $m^{1/2}$  zu beseitigen ist. Zu diesem Zweck sind die Räume mit verallgemeinerter dominierender gemischter Glattheit  $S_{p,q}^{r,\alpha} B(\mathbb{R})$  und  $S_{p,q}^{r,\alpha} F(\mathbb{R})$  eingeführt. Als Beispiel sei hier  $S_{p,\infty}^{r,\alpha} B(\mathbb{R})$ , für  $r, \alpha \in \mathbb{R}$  und  $1 \leq p < \infty$ , definiert als die Menge aller  $f \in S'(\mathbb{R})$  mit

$$\begin{aligned} \|f|S_{p,\infty}^{r,\alpha} B(\mathbb{R})\| &= \sup_{k,l \in \mathbb{N}_0} 2^{(k+l)r} ((1+k)(1+l))^\alpha \cdot \\ &\cdot \|F^{-1}[(\varphi_k \otimes \varphi_l)(\xi)Ff](x)|L_p(\mathbb{R})\| < \infty. \end{aligned}$$

Dabei ist  $(\varphi_\ell)_\ell$  eine glatte dyadische Zerlegung der Einheit in  $\mathbb{R}$ . Im Fall  $\alpha = 0$  erhalten wir die klassischen Besov-Nikol'skij-Räume  $S_{p,\infty}^r B(\mathbb{R})$  mit dominierender gemischter Glattheit, siehe z. B. [?, Kapitel 2]. Neben einer Charakterisierung der Räume mit Hilfe von Differenzen, ist für die Güte der Approximation bezüglich des hyperbolischen Kreuzes beispielsweise

$$\left\| I - S_m^H : S_{p,\infty}^{r, \frac{1}{\min(2p,4)}} B(\mathbb{R}) \rightarrow L_p(\mathbb{R}) \right\| \sim 2^{-rm}$$

für  $1 < p < \infty$  gezeigt.

# Analyse von hoch-frequenten Windgeschwindigkeiten mit Hilfe von Zeitreihenanalyse und Extremwerttheorie (Christina Steinkohl)

Im Kontext erneuerbarer Energien ist Windkraft zu einer der bedeutendsten Energieresourcen geworden. Ein präzises Wissen über das Verhalten von Windgeschwindigkeiten ist daher essentiell für das Design und die Kalibrierung von Windturbinen.

In der vorliegenden Diplomarbeit präsentieren wir statistische Modelle für hoch-frequent gemessene Windgeschwindigkeiten, wobei wir Maxima-pro-Sekunde Zeitreihen für 3 aufeinander folgende Tage analysieren. Die Messungen stammen von Cup Anemometern, die an 3 meteorologischen Masten errichtet sind.

Zunächst werden Methoden aus der univariaten und multivariaten Zeitreihenanalyse verwendet, um einen Einblick in die Korrelationen innerhalb und zwischen den Zeitreihen zu erhalten. Dies beinhaltet den Fit von ein-dimensionalen und vektor-wertigen autoregressiven Moving-average (ARMA) Prozessen, wobei zunächst eine neue Transformationsprozedur eingeführt wird, um die Nicht-Stationarität der Zeitreihen in einer Weise zu handhaben, die für Vorhersagen verwendet werden kann.

Extreme Windgeschwindigkeiten über bestimmten Schwellenwerten können zu drastischen Schäden an den Instrumenten der Windturbinen führen. Daher ist es sinnvoll den Rotor zu einem bestimmten Zeitpunkt aus dem Wind zu drehen oder abzuschalten. Extremwerttheorie kann helfen, den optimalen Zeitpunkt, der zu minimalem Energieverlust führt, zu finden. Der Hauptteil dieser Arbeit beschäftigt sich daher mit der Analyse von extremen Windgeschwindigkeiten über hohen Schwellenwerten. Im Allgemeinen werden solche Exzesse mit der verallgemeinerten Pareto Verteilung modelliert, wobei in der Standardtheorie von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen ausgegangen wird. Da unsere Daten nicht unabhängig im Zeitverlauf sind, verwenden wir verschiedene Methoden um dieses Problem zu behandeln. Zunächst verwenden wir einen Ansatz, der aus der Finanzmathematik bekannt ist als Kointegration, und der uns zur Analyse der Differenzen in Windgeschwindigkeiten zwischen den Masten führt. Ein multivariates Modell für gemeinsame Exzesse der Differenzen mit Hilfe von parametrischen und nicht-parametrischen Methoden wird vorgestellt und analysiert. Im letzten Teil dieser Arbeit werden Standardmethoden aus der Extremwerttheorie durch statistische Modellierung erweitert, um die Nicht-Stationarität der Zeitreihen ohne Transformationen direkt zu modellieren. Wir nehmen an, dass die Exzesse, bedingt auf die Parameter der verallgemeinerten Pareto Verteilung, eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen bilden und modellieren die zeitlichen Abhängigkeiten in den Parametern. Bedingte Quantile werden auf Basis der gefitteten Verteilungen geschätzt und zeigen das Risiko einer extremen Windgeschwindigkeit innerhalb der nächsten Sekunde. Schließlich approximieren wir die bivariate Verteilung der Exzesse mit Hilfe von parametrischen und nicht-parametrischen Methoden, um eine Abhängigkeitsstruktur in extremen Windgeschwindigkeiten zwischen zwei Masten mit einer bestimmten Distanz zu bekommen.

---

# Finite Elemente Methoden mit Anwendung auf Probleme der Chemotaxis (Robert Strehl)

In dieser Arbeit widmen wir uns einer numerischen Methode, um partielle Differentialgleichungen der Chemotaxis stabil lösen zu können.

Chemotaxis ist ein biologischer Begriff und bezeichnet die Orientierung nach chemischen Stoffen. Sie spielt in der Entwicklung von zahlreichen Organismen eine entscheidende Rolle. Die Eigenschaft, chemotaktisch reagieren zu können, gibt den Organismen die Chance, günstigere Orte ihrer Umwelt zu erreichen. Somit können sie beispielsweise Futterstellen ausfindig machen, Sexualpartner finden oder auch Gefahren ausweichen. Ausserdem kann Chemotaxis auch nützlich sein, um komplexere Organismen zu entwickeln. Bei gewissen Schimmelpilzpopulationen bewirkt Chemotaxis die Aggregation einzelner Zellen zu einem multizellulären Komplex. Auch kann das Prinzip der chemotaktischen Kommunikation als Ansatz zur Erklärung von Tumorentwicklungen angewandt werden.

In dieser Arbeit werden wir den mathematisch und numerisch interessanten Teil der Chemotaxis betrachten. Wir konzentrieren uns zunächst auf ein klassisches Modellproblem. Hierzu werden wir ein paar allgemeine Aussagen über die Lösbarkeit und Eigenschaften einer Lösung angeben.

Der eigentliche Hauptteil dieser Arbeit wird dann die numerische Lösung ausgewählter Modelle thematisieren. Wir werden unsere numerischen Diskretisierungen vorstellen und ein stabiles Verfahren entwickeln, welches uns physikalisch zutreffende Lösungen liefert. Zudem gewähren wir auch einen Einblick in die Behandlung erweiterter Modelle. Um die numerischen Ergebnisse interpretieren zu können, werden wir stets die Verknüpfung mit der biologischen Motivation der Modelle herstellen.

---

# Gromovs $h$ -Prinzip und Metriken mit vorgegebener Krümmung (Manuel Streil)

In der Riemannschen Geometrie spielt die Frage, in welcher Hinsicht die Existenz einer Metrik mit vorgegebenen Krümmungseigenschaften die globale Struktur der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit  $M$  einschränkt, eine besondere Rolle. Ist zum Beispiel  $M$  geschlossen, so kann man nicht zugleich Metriken mit strikt positiver und negativer Krümmung finden.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir offene Mannigfaltigkeiten und lassen die Bedingung an die Vollständigkeit der Metrik fallen. Gromov bemerkt in seiner Dissertation, dass unter diesen Voraussetzungen sowohl Metriken mit strikt positiver als auch welche mit negativer Krümmung existieren. Mit der gleichen Technik verschärfen wir dieses Resultat und zeigen, dass man sogar fast den Wert der Krümmung vorgeben kann: Für  $\delta > 0$  und  $a \in \mathbb{R}$  gibt es eine Riemannsche Metrik, sodass die Schnittkrümmung stets im Intervall  $(a - \delta, a + \delta)$  liegt.

Der Satz ist eine Anwendung von Gromovs  $h$ -Prinzip für unter Diffeomorphismen invariante offene Differentialrelationen auf offenen Mannigfaltigkeiten. Dabei ist eine Differentialrelation eine Bedingung an die partiellen Ableitungen einer unbekanntes Funktion. Gromov entwickelt homotopietheoretische Methoden zur Lösung von Differentialrelationen. Dabei geht er zu einer formalen algebraischen Relation über, indem er die auftretenden partiellen Ableitungen durch neue unabhängige Variablen ersetzt. Offenbar ist die Lösbarkeit dieser formalen Relation notwendig für die Lösbarkeit der Differentialrelation. Gromov zeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen eine formale Lösung zu einer Lösung des Ausgangsproblems deformiert werden kann ( $h$ -Prinzip). Zur invarianten Formulierung auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  betrachten wir ein glattes Faserbündel  $p : E \rightarrow M$ . Eine Differentialrelation der Ordnung  $r$  stellt nun eine Bedingung an den  $r$ -Jet von Schnitten des Bündels.

Wir untersuchen zunächst das Bündel der positiv-definiten  $(2, 0)$ -Tensoren, deren Schnitte gerade die Riemannschen Metriken auf der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit sind. Die Beobachtung, dass die Schnittkrümmung nur vom 2-Jet der Metrik abhängt, erlaubt die Übersetzung des Problems in eine Krümmungsrelation. Die eigentliche Schwierigkeit besteht nun darin, eine formale Lösung zu finden. Wir zeigen sogar die Existenz einer formalen Lösung mit konstanter Krümmung, bevor wir dann Gromovs  $h$ -Prinzip für die Krümmungsrelation in allen Einzelheiten beweisen. Im Anhang entwickeln wir schließlich die verwendeten Resultate aus der Homotopietheorie.

---

# **Analysen zum Interventionsverhalten von Lehrern im Umgang mit Schülerfehlern in unterschiedlichen kooperativen Lernumgebungen mit mathematischen Modellierungsaufgaben im neunten Schuljahr (Heike Taut und Natalie Tropper)**

Im Zentrum der vorliegenden empirischen Arbeit aus dem Bereich der Mathematikdidaktik steht die Analyse von Lehrerinterventionen in kooperativen Lernumgebungen mit mathematischen Modellierungsaufgaben. Den konkreten Untersuchungsgegenstand stellte das Lehrerverhalten im Rahmen der Laborstudie Lösungsplan dar, welche als Teil des Projekts DISUM (vgl. Blum et al. 2008) in neunten Realschulklassen durchgeführt wurde. Hauptanliegen dieser Studie war es, das strategische und diagnostische Hilfsinstrument Lösungsplan, welches eine allgemeine, mehrschrittige Herangehensweise an mathematische Modellierungsaufgaben aufzeigt, bezüglich seiner Effekte auf die Modellierungskompetenz der Schüler zu untersuchen. Für uns ergab sich hieraus neben der allgemeinen Zielsetzung, die von der untersuchten Lehrperson getätigten Interventionen zu charakterisieren, die zentrale Fragestellung, welche Unterschiede bezüglich des Interventionsverhaltens zwischen den beiden in der Studie verwendeten kooperativen Unterrichtsdesigns einem mit und einem ohne Lösungsplan aufzudecken seien. Das zu analysierende Datenmaterial bestand hierbei aus schriftlichen Schülerlösungen sowie Unterrichtsvideos zu je zwei mathematischen Modellierungsaufgaben pro Unterrichtsdesign. Als Analyseinstrument wurde angelehnt an Leiss (2007) ein Kodiermanual entwickelt, welches neben der bei den Schülern vorliegenden Problemebene verschiedene beobachtbare Komponenten des lösungsprozessbezogenen Diagnose- und Interventionsverhaltens eines Lehrers umfasst. Neben der Untersuchung für den Interventionsprozess wesentlicher Faktoren wie Auslöser, Ebene und Absicht von Interventionen sollte das Manual eine Analyse der aufgabenbezogenen Diagnose sowie des Einsatzes des Lösungsplans ermöglichen. Im Anschluss an die Kodierung der vorliegenden Daten wurde zunächst in Einzelfallanalysen das Interventionsverhalten bei konkret aufgetretenen, aufgabenspezifischen Schülerschwierigkeiten untersucht. Dies und abschließende Häufigkeitsanalysen des gesamten kodierten Datenmaterials offenbarten grundlegende, sowohl klassen- wie auch aufgabenspezifische Unterschiede des Interventionsverhaltens der untersuchten Lehrperson. So zeigte sich etwa, dass in der Lösungsplan-Klasse weitaus mehr strategische Interventionen verzeichnet werden konnten als in der Klasse ohne Lösungsplan. Innerhalb des Lösungsplan-Designs selbst lie sich eine starke Konzentration auf je eine spezifische Lösungsplan-Hilfe feststellen, die wiederum von der behandelten Aufgabe abhing. Die festgestellten Unterschiede im Interventionsverhalten konnten schließlich auf verschiedene Einflussfaktoren, etwa die Offenheit und den Typus der verwendeten Aufgaben sowie Erhebungsbedingungen und Zielsetzungen der zugrunde liegenden Studie, zurückgeführt werden.

---

## Über die $\mathcal{F}$ -Modul-Struktur von Matlis-Dualen lokaler Kohomologiemoduln (Danny Tobisch)

Durch eine Arbeit von Gennady Lyubeznik hat sich herausgestellt, dass  $\mathcal{D}$ -Moduln in Charakteristik Null ein wichtiges Mittel zur Untersuchung von lokalen Kohomologiemoduln darstellen. In positiver Charakteristik scheinen die ebenfalls von Lyubeznik eingeführten  $\mathcal{F}$ -Moduln das passende Analogon zu sein. In beiden Fällen ergeben sich wichtige Endlichkeitsbedingungen an die lokalen Kohomologiemoduln  $H_i^i(R)$ . Andererseits hat sich gezeigt, dass sich die Untersuchung der Matlis-Duale von bestimmten lokalen Kohomologiemoduln, genauer der Moduln  $D(H_i^i(R)) = \text{Hom}(H_i^i(R), E(R/\mathfrak{m}))$ , unter gewissen Umständen dazu eignet, Fragen über die Moduln  $H_i^i(R)$  zu klären. Insbesondere die Frage, ob lokale Kohomologiemoduln artinsch sind oder Aussagen über mengentheoretisch vollständige Durchschnitte lassen sich mit Informationen über die Matlis-Duale beantworten. Dabei sei  $R$  ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $E(R/\mathfrak{m})$  die injektive Hülle des Residuenkörpers von  $R$ . Michael Hellus hat 2007 gezeigt, dass diese Matlis-Duale im Fall eines Potenzreihenringes  $R$  über einem Körper  $\mathbb{k}$  der Charakteristik Null eine kanonische  $\mathcal{D}$ -Modul-Struktur besitzen, aber im Allgemeinen Beispiele für  $\mathcal{D}$ -Moduln liefern, welche nicht holonom sind. Inhalt der Arbeit ist es zu zeigen, dass in diesem Fall  $D(H_i^i(R))$  in positiver Charakteristik eine  $\mathcal{F}$ -Modul-Struktur trägt, im Allgemeinen aber nicht  $\mathcal{F}$ -endlich ist. Außerdem werden die engen Zusammenhänge zwischen  $\mathcal{D}$ -Moduln und  $\mathcal{F}$ -Moduln, welche in positiver Charakteristik zu beobachten sind, noch näher untersucht. Dabei stellt sich heraus, dass das Ergebnis von Hellus über die  $\mathcal{D}$ -Modul-Struktur und unser Ergebnis über die  $\mathcal{F}$ -Modul-Struktur der Moduln  $D(H_i^i(R))$  in Charakteristik  $p > 0$  gerade die Manifestation derselben Besonderheiten sind. Insbesondere zeigt sich, dass eine  $\mathcal{F}$ -Modul-Struktur in positiver Charakteristik auch eine  $\mathcal{D}$ -Modul-Struktur induziert. Dies verallgemeinert das Ergebnis von Hellus über die  $\mathcal{D}$ -Modul-Struktur in Charakteristik Null auf den Fall von Charakteristik  $p > 0$ .

---



# Non-parametric estimation of Lévy densities from observations on a discrete time grid (Florian Alexander Johann Ueltzhöfer)

Lévyprozesse, d.h. Prozesse mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, nehmen eine zentrale Position in der Theorie stochastischer Prozesse ein. Im allgemeinen setzen sich diese Prozesse aus einer Brownschen Bewegung mit Drift und einem davon unabhängigen zeithomogenen Sprungprozeß zusammen. In der vorliegenden Diplomarbeit beschäftige ich mich mit der nichtparametrischen Schätzung von Lévydichten, dem Parameter, der die Dynamik der Sprünge beschreibt. Zur Beschreibung eines praxisnahen statistischen Problems wird davon ausgegangen, daß die Realisierungen eines Lévyprozesses zu diskreten Zeitpunkten vorliegen. In den beobachteten Zuwächsen bilden die Sprünge eine latente Komponente.

Für die Lévydichte eingeschränkt auf eine Borelmenge, welche zu einer Umgebung des Ursprungs disjunkt ist, wird eine Familie nichtparametrischer Schätzer konstruiert. Der Schätzfehler wird in einer  $L^2$ -Norm gemessen und die Performance unserer Schätzer wird mit den analogen, die für das statistische Problem des Schätzens einer Lévydichte basierend auf zeitstetiger Beobachtung aller Sprünge von Figueroa-López und Houdré (2006) untersucht wurden, verglichen. Für die Fälle eines zusammengesetzten Poissonprozesses, eines stabilen Prozesses sowie eines allgemeinen Sprungprozesses jeweils überlagert von einer Brownschen Bewegung mit Drift leite ich hinreichende Bedingungen an die diskrete Beobachtungsrate her, so daß der zusätzliche Fehler, der durch zeitdiskrete Beobachtung entsteht, asymptotisch vernachlässigt werden kann.

Darauf aufbauend übertrage ich die Methode der datenbasierenden Auswahl eines Schätzers (innerhalb der zuvor konstruierten Familie) mittels Penalty-Funktion. Als wichtigstes Resultat leite ich hinreichende Bedingungen an die Penalty-Funktion her, so daß eine Orakel-Ungleichung gilt. Mit einer solchen Ungleichung kann man den mittleren quadratischen Fehler des Penalty-Schätzers durch eine affine Transformation des minimal möglichen mittleren quadratischen Fehlers nach oben abschätzen. Für den Spezialfall hinreichend glatter Lévydichten aus einem Sobolevraum läßt sich die Konvergenzrate des besten (nichtparametrischen) Schätzers explizit bestimmen und hängt nur vom Glattheitsgrad der Lévydichte ab. Durch die Orakel-Ungleichung konnte ich zeigen, daß der Penalty-Schätzer diese optimale Konvergenzrate adaptiert.

---

# Das Hard-Core-Modell zur Beschreibung der Energielandschaft eines Glasbildners (Andrea Winkler)

In dieser mathematisch und physikalisch motivierten Diplomarbeit werden verschiedene Aspekte des Hard-Core-Modells behandelt, welches als Vielteilchenmodell gewisse Eigenschaften glasbildender Systeme besitzt. Das Modell besteht aus  $m \in \mathbb{N}$  Kugeln auf einem  $d$ -dimensionalen  $N \times \dots \times N$ -Gitter mit periodischen Randbedingungen und der Einschränkung, dass keine zwei benachbarten Gitterplätze gleichzeitig besetzt werden dürfen. Diese Einschränkung resultiert aus der Annahme harter Kugeln, die nicht überlappen können, und deren Durchmesser gerade der Länge der Diagonalen eines Gitterplatzes entspricht.

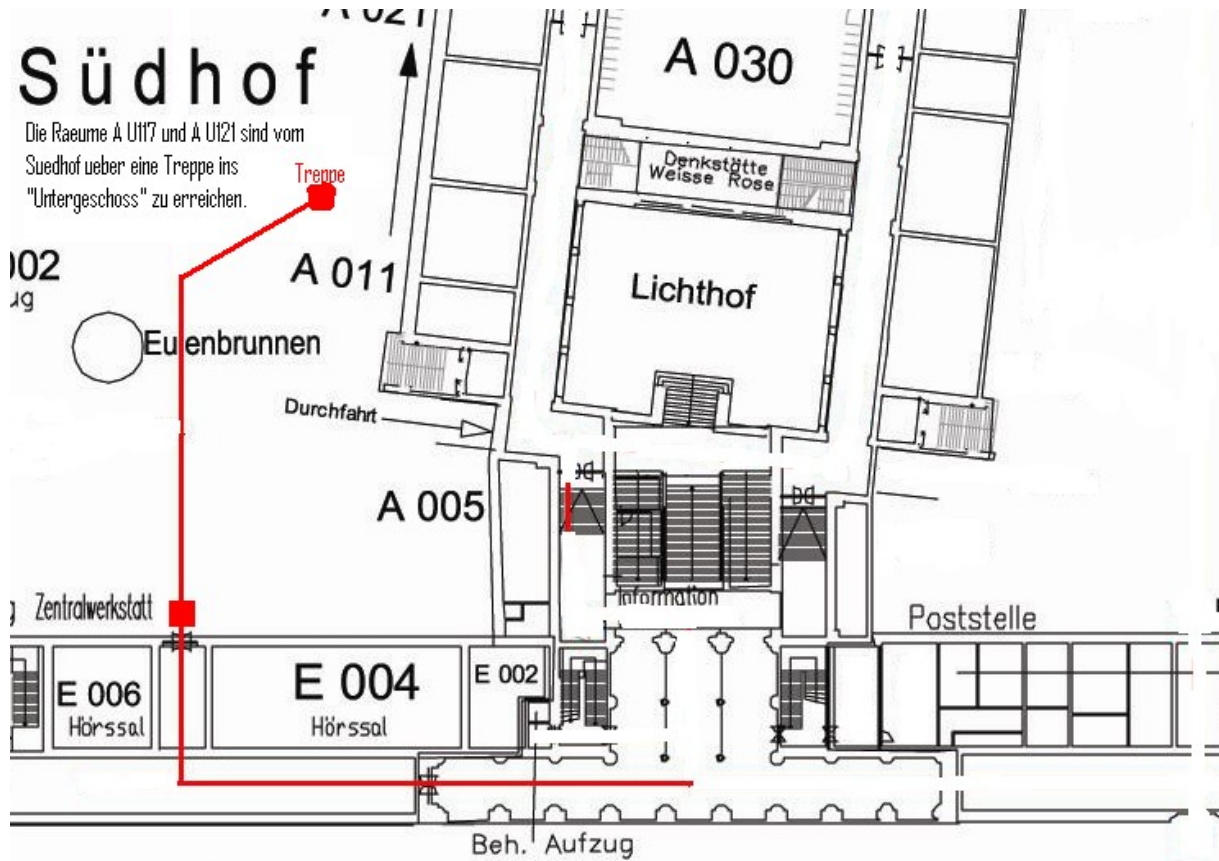
Nach einer kurzen Einführung in das Modell und die Theorie der Markov-Ketten wird zunächst die Anzahl an das Überlappingsverbot einhaltenden Zuständen studiert. Hierzu wird ein exaktes, rekursives, kombinatorisches Verfahren vorgestellt sowie ein ebenfalls rekursiver, numerischer, auf das Widom-Verfahren zurückgehender Algorithmus entwickelt. Letzterer, dessen entscheidender Schritt aus der Anwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen besteht, erweist sich als schneller in der Berechnung und auf eine größere Problemvielfalt anwendbar.

Anschließend werden stochastische Prozesse im vorliegenden Modell behandelt, die durch zufällige Bewegung der Teilchen auf dem Gitter entstehen. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Mischzeit, welche ein Maß für die Geschwindigkeit der gleichmäßigen Verteilungskonvergenz gegen die stationäre Verteilung bildet. Mit Hilfe der Kopplungsmethode kann diese Mischzeit für verschiedene Prozesse polynomiell beschränkt werden.

Die Arbeit schließt mit einer Auswertung der mit dem numerischen Verfahren erhaltenen Daten für die Anzahl  $A(m, N^d)$  an Zuständen in einer und zwei Dimensionen. Dabei konnten wir die direkte Formel  $A(m, N^d) = e^{a(m, N^d) - \frac{1}{2m} \ln(c(m, N^d))}$  entwickeln, wobei  $a$  und  $c$  Polynome von zwei Variablen sind. Insbesondere liefert dies die bisher unbekannte Abhängigkeitsstruktur von der Gittergröße  $N^d$  und der Teilchenzahl  $m$ .

---

## Lageplan der LMU



Geschwister-Scholl-Platz 1

## Abendessen am Mittwoch

Die DMV lädt alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Studierendenkonferenz nach dem Abendvortrag zu einem gemeinsamen Abendessen ein.

Zeit: Mi 10.03. 19.00 Uhr

Ort: Augustiner am Dom (Frauenplatz 8)

Gezahlt wird: **Nur das Essen.** Getränkekosten müssen von den Teilnehmern übernommen werden.

