Übungsblatt 7

12.01.2016

---

22. Sei (Ω, μ) ein Maßraum, $1 \leq p \leq \infty$, $A \in L(L_p(\mu))$ positiv, d.h. $Au \geq 0$ für alle $0 \leq u \in L_p(\mu)$. Zeige:

(a) $|Au| \leq A\,|u|$ für alle $u \in L_p(\mu)$.
(b) $\|A\| = \sup\Big\{\|Au\|_p;\ 0 \leq u \in L_p(\mu),\ \|u\|_p \leq 1\Big\}$.

23. Sei (Ω, μ) ein Maßraum, $\check{C} \subseteq \mathbb{K}$ abgeschlossen und konvex, $0 \in \check{C}$. Sei $\check{P} \colon \mathbb{K} \to \check{C}$ die minimierende Projektion. Zeige:

(a) $C := \big\{u \in L_2(\mu);\ u(x) \in \check{C}$ für μ-f.a. $x \in \Omega\big\}$ ist nichtleer, abgeschlossen und konvex.
(b) Die minimierende Projektion $P \colon L_2(\mu) \to C$ ist gegeben durch $(Pu)(x) = \check{P}(u(x))$ für alle $x \in \Omega$.

24. Sei $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^1-Normalkontraktion, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $u, \partial_j u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Zeige: $F \circ u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $\partial_j(F \circ u) = (F' \circ u)\partial_j u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$, $u, \partial_j u \in L_1(\Omega)$, und nutze Faltung mit δ-Folge aus $C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

25. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $a \colon \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ lokal integrierbar, $a(x)$ symmetrisch, $a(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$.

(a) Sei

$$
\begin{aligned}
D(\tau_0) &:= C_c^\infty(\Omega),\\
\tau_0(u, v) &:= \int_\Omega (a \operatorname{grad} u \,|\, \operatorname{grad} v) \qquad (u, v \in D(\tau_0)).
\end{aligned}
$$

Sei τ_0 abschließbar (vergleiche Satz 9.6), $\tau_{\mathrm{D}} := \overline{\tau_0}$, A_{D} der mit τ_{D} assoziierte Operator in $L_2(\Omega)$. Zeige, dass $T_{\mathrm{D}} := (e^{-tA_{\mathrm{D}}})_{t\geq 0}$ eine symmetrische Submarkov-Halbgruppe ist.
Hinweis: Satz 10.11 und die darauffolgende Bemerkung.

(b) Sei $\lambda\colon \Omega \to [0,\infty)$ messbar, $\frac{1}{\lambda} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $a(x) \geq \lambda(x) E_n$ für alle $x \in \Omega$. Sei

$$\begin{aligned} D(\tau_{\mathrm{N}}) &:= \left\{ u \in L_2 \cap W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega);\ (a \operatorname{grad} u \,|\, \operatorname{grad} u) \in L_1(\Omega) \right\}, \\ \tau_{\mathrm{N}}(u,v) &:= \int\limits_{\Omega} (a \operatorname{grad} u \,|\, \operatorname{grad} v) \qquad (u, v \in D(\tau_{\mathrm{N}})). \end{aligned}$$

Sei A_{N} der mit τ_{N} assoziierte Operator in $L_2(\Omega)$. Zeige, dass $T_{\mathrm{N}} := (e^{-tA_{\mathrm{N}}})_{t\geq 0}$ eine symmetrische Submarkov-Halbgruppe ist.
Hinweis: Aufgabe 24, Satz 10.11 und die darauffolgende Bemerkung.