

Übungsblatt 6

15.12.2015

18. Sei H ein Hilbertraum, τ eine dicht definierte, symmetrische, positive, abgeschlossene Form in H . Sei A der zu τ assoziierte selbstadjungierte Operator, $T = (e^{-tA})_{t \geq 0}$. Für $t > 0$ definiere

$$D(\tau_t) := H,$$

$$\tau_t(u, v) := \frac{1}{t} (u - T(t)u \mid v).$$

Zeige: Für $u \in H$ ist $(0, \infty) \ni t \mapsto \tau_t(u)$ monoton fallend, und

$$D(\tau) = \left\{ u \in H; \lim_{t \rightarrow 0} \tau_t(u) < \infty \right\},$$

$$\tau(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \tau_t(u, v).$$

19. Sei H ein Hilbertraum, τ eine dicht definierte, symmetrische, positive, abgeschlossene Form in H . Sei A der zu τ assoziierte selbstadjungierte Operator. Für $\beta > 0$ definiere

$$D(\tau_\beta) := H,$$

$$\tau_\beta(u, v) := \beta (u - \beta R(\beta, -A)u \mid v).$$

Zeige: Für $u \in H$ ist $(0, \infty) \ni \beta \mapsto \tau_\beta(u)$ monoton wachsend, und

$$D(\tau) = \left\{ u \in H; \lim_{\beta \rightarrow \infty} \tau_\beta(u) < \infty \right\},$$

$$\tau(u, v) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \tau_\beta(u, v).$$

20. Sei H ein Hilbertraum, τ eine dicht definierte, symmetrische, positive, abgeschlossene Form in H . Sei (u_n) in $D(\tau)$, $u_n \rightarrow u$ in H ,

$$c := \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau(u_n) < \infty.$$

Zeige: $u \in D(\tau)$, $\tau(u) \leq c$.

21. Seien $\alpha, \beta \geq 0$. Definiere H in $L_2(0, 1)$ durch

$$D(A) := \{u \in C^1[0, 1]; Au := -u'' \in L_2(0, 1), u'(0) = \alpha u(0), u'(1) = -\beta u(1)\}.$$

Zeige, dass A selbstadjungiert und ≥ 0 ist, und bestimme die zugehörige abgeschlossene symmetrische Form τ in $L_2(0, 1)$.

Hinweis: partielle Integration und Sobolev-Lemma. Eigenschaften von A über Eigenschaften der Form ermitteln.