Übungsblatt 5

01.12.2015

---

14. Ein Banachraum X heißt *strikt konvex*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\|x + y\| = 2$ schon $x = y$ folgt. Zeige, dass die Dualitätsmenge $J(x)$ für $x \in X$ einelementig ist, falls X' strikt konvex ist.

Bemerkung: Für $p \in (1, \infty)$ sind die L_p-Räume strikt konvex.

15. Sei $X := C[0,1]$. Definiere A in X durch $D(A) := \{u \in C^1[0,1];\ u'(1) = 0\}$, $Au := -u'$. Zeige, dass A dissipativ ist, und dass A eine Kontraktions-Halbgruppe erzeugt. Ermittle diese Halbgruppe.

16. Sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, F' beschränkt.

(a) Zeige: Es gibt $\varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so dass

$$\partial_t \varphi(t,x) = F(\varphi(t,x)) \quad ((t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n),$$

$\varphi(t, \varphi(s,x)) = \varphi(t+s, x)$ und $\varphi(0,x) = x$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Sei $X := C_0(\mathbb{R}^n)$. Definiere $T\colon \mathbb{R} \to L(X)$ durch

$$(T(t)f)(x) := f(\varphi(t,x)) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}),$$

mit φ aus (a). Zeige, dass T eine isometrische C_0-Gruppe erzeugt.

(c) Sei A der Erzeuger von T aus (b). Zeige, dass A die Abschließung von A_0 gegeben durch

$$D(A_0) := C_c^1(\mathbb{R}^n), \quad A_0 u := F \cdot \operatorname{grad} u$$

ist

17. Im Hilbertraum $H := L_2(\mathbb{R})$ sei die Form τ definiert durch

$$D(\tau) := C_c(\mathbb{R}), \quad \tau(u,v) := u(0)\overline{v(0)}.$$

Zeige, dass τ nicht abschließbar ist. Was ist die Vervollständigung von $(D(\tau), \|\cdot\|_\tau)$?