Übungsblatt 4

17.11.2015

---

14. Sei X ein Banachraum, T eine C_0-Halbgruppe auf X mit Erzeuger A, $f \in C((0,\infty);X)$, $x \in X$.

(a) Eine Funktion $u\colon [0,\infty) \to X$ heißt *klassische Lösung* des inhomogenen abstrakten Cauchy-Problems

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \quad (t > 0), \quad u(0) = x,$$

falls $u \in C^1((0,\infty);X) \cap C([0,\infty);X)$, $u(t) \in D(A)$ für alle $t > 0$ und u die beiden Gleichungen erfüllt. Zeige, dass jede klassische Lösung die Darstellung $u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$ für alle $t \geq 0$ besitzt.

(b) Sei nun zusätzlich $f(t) \in D(A)$ $(t \geq 0)$, $A \circ f$ stetig, $x \in D(A)$. Zeige, dass eine klassische Lösung u existiert.

15. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Sei $h\colon \Omega \to \mathbb{K}$ messbar, M_h in $L_2(\mu)$ der mit h assoziierte Multiplikationsoperator. Beweise:

(a) M_h ist selbstadjungiert $\iff h(x) \in \mathbb{R}$ für μ-f.a. $x \in \mathbb{R}$.

(b) M_h ist selbstadjungiert und $M_h \geq 0 \iff h \geq 0$ μ-f.ü.

16. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Sei $h\colon \Omega \to \mathbb{K}$ messbar, M_h der mit h assoziierte Multiplikationsoperator, $1 \leq p < \infty$. Zeige, dass M_h genau dann eine kontraktive C_0-Halbgruppe T auf $L_p(\mu)$ erzeugt, wenn $\operatorname{Re} h \leq 0$ μ-f.ü., und dass die Halbgruppe in diesem Fall gegeben ist durch

$$T(t)f(x) = e^{th(x)}f(x) \quad (\mu\text{-f.a. } x \in \Omega,\, f \in L_p(\mu),\, t \geq 0).$$

17. Seien $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ Hilberträume, $U \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

(a) Es sind äquivalent:

(i) U ist unitär, d.h. es gilt $U^* = U^{-1}$.

(ii) U ist bijektiv und skalarprodukttreu (d.h. $(Uf \mid Ug) = (f \mid g)$ für alle $f, g \in \mathcal{H}_1$).

(iii) U ist bijektiv und isometrisch (d.h. $\|Uf\| = \|f\|$ für alle $f \in \mathcal{H}_1$).

(b) Sei U unitär, A_1 bzw. A_2 Operatoren in $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$, A_1 Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T_1, $A_2 = UA_1U^*$. Zeige, dass durch

$$T_2(t) := UT_1(t)U^* \quad (t \geq 0)$$

eine C_0-Halbgruppe auf $\mathcal{H}_2$ mit Erzeuger A_2 definiert wird.