Übungsblatt 3

04.11.2015

---

10. Sei X ein Banachraum, T eine beschränkte C_0-Halbgruppe auf X mit Erzeuger A, $M := \sup_{t\geq 0} \|T(t)\|$.

(a) Sei

$$|||x||| := \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\| \quad (x \in X).$$

Zeige, dass $|||\cdot|||$ eine Norm auf X definiert, die äquivalent zu $\|\cdot\|$ ist, und dass T kontraktiv auf $(X, |||\cdot|||)$ ist.

(b) Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$. Zeige, dass

$$\left\|(I - \alpha_1 A)^{-1} \cdots (I - \alpha_n A)^{-1}\right\| \leq M.$$

11. Sei X ein Banachraum, T eine C_0-Halbgruppe auf X. Für $h > 0$ definiere $A_h := \frac{1}{h}(T(h) - I)$. Zeige, dass $e^{tA_h}x \to T(t)x$ für alle $x \in X$ ($h \to 0$), gleichmäßig in t für kompakte Teilmengen von $[0, \infty)$.

12. Sei X ein Banachraum, T eine C_0-Halbgruppe auf X mit Erzeuger A. Sei

$$\omega_0(T) := \inf\left\{\omega \in \mathbb{R};\ \exists\, M \geq 1 : \|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad (t \geq 0)\right\}$$

der *Typ* von T (auch *Wachstumsschranke* genannt), und sei

$$s(A) := \sup\left\{\operatorname{Re}\lambda;\ \lambda \in \sigma(A)\right\}$$

die *Spektralschranke* von A. Zeige

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0(T) < \infty.$$

13. Sei ρ das Maß auf $(0, \infty)$ mit Dichte $[s \mapsto e^s]$ (bezüglich Lebesgue-Maß). Sei $X := C_0[0, \infty) \cap L_1((0, \infty), \rho)$ mit der Norm

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f\|_{L_1(\rho)} \quad (f \in X).$$

Dann ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Sei T die Linkstranslationshalbgruppe auf X definiert durch

$$T(t)f := f(\cdot + t) \quad (f \in X, t \geq 0).$$

Sei A der Erzeuger von T. Zeige:

(a) Es gilt $\|T(t)\| = 1$ für alle $t \geq 0$.

(b) Es gilt $\omega_0(T) = 0$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ f \in X;\ f \in C^1[0, \infty), f' \in X \right\}, \\ Af &= f'. \end{aligned}$$

(d) Es gilt $s(A) = -1$.

Hinweis für (d): Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda < -1$ sei $f_\lambda(s) := e^{\lambda s}$ $(s \in (0, \infty))$. Zeige: f_λ ist Eigenfunktion von A. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda > -1$: Zeige: Für alle $f \in X$ existiert $\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) f \, ds$ sowohl in $C_0[0, \infty)$ als auch in $L_1((0, \infty), \rho)$.