

Übungsblatt 2

20.10.2015

6. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $1 \leq p < \infty$. Sei $a: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ messbar, $\operatorname{Re} a \leq 0$. Definiere $T: [0, \infty) \rightarrow L(L_p(\mu))$ durch

$$T(t)f := e^{ta}f \quad (f \in L_p(\mu), t \geq 0).$$

(a) Zeige: T ist eine stark stetige Halbgruppe.

(b) Definiere den maximalen Multiplikationsoperator M_a in $L_p(\mu)$ durch

$$\begin{aligned} D(M_a) &:= \{f \in L_p(\mu); af \in L_p(\mu)\}, \\ M_af &:= af \quad (f \in D(M_a)). \end{aligned}$$

Zeige, dass M_a dicht definiert und abgeschlossen ist.

(c) Zeige, dass M_a der Erzeuger von T ist.

7. Sei X ein Banachraum, T eine C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger A . Sei $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$T_\lambda(t) := e^{\lambda t}T(t) \quad (t \geq 0).$$

Zeige, dass T_λ eine C_0 -Halbgruppe auf X ist (*reskalierte Halbgruppe*, mit Erzeuger $A + \lambda I$).

8. Sei $c > 0$. Setze $C_0(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}); \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ mit der Norm $\|\cdot\|$ gegeben durch

$$\|f\| := \|f\|_\infty + c|f(0)|$$

aus. Sei T die Rechtstranslationshalbgruppe auf $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$.

Zeige: T ist stark stetig, und $\|T(t)\| = 1 + c$ für alle $t > 0$.

9. Sei $p \in [1, \infty]$, $X := L_p((0, 1) \times (1, \infty))$. Für $t \geq 0$ sei

$$T(t)f(x, y) := \begin{cases} e^{y^2 t} f(x + ty, y), & (x, y) \in (0, 1) \times (1, \infty), x + ty \in (0, 1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige: T definiert eine Halbgruppe auf X , die nicht stark stetig ist, mit $\|T(t)\| \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$).