Übungsblatt 1

13.10.2015

---

3. Sei $1 \leq p < \infty$, T die Rechtstranslationshalbgruppe auf $L_p(\mathbb{R})$. Zeige, dass $\|T(t) - I\| = 2$ für alle $t > 0$.

Lösung. Offenbar gilt $\|T(t)\| = 1$ ($t \geq 0$), also

$$\|T(t) - I\| \leq \|T(t)\| + \|I\| = 2 \quad (t \geq 0).$$

Sei $t > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n := (2nt)^{-1/p} \sum_{k=-n}^{n-1} (-1)^k \mathbb{1}_{(kt,(k+1)t)} \in L_p(\mathbb{R}).$$

Dann gilt

$$\|f_n\|_p^p = (2nt)^{-1} \int_{-nt}^{nt} dx = 1.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\|f_n(\cdot - t) - f_n\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |f_n(x-t) - f_n(x)|^p \, dx \\
&= (2nt)^{-1} \int_{-nt}^{(-n+1)t} dx + (2nt)^{-1} \sum_{k=-n+1}^{n-1} \int_{kt}^{(k+1)t} 2^p \, dx + (2nt)^{-1} \int_{nt}^{(n+1)t} dx \\
&= \frac{(2n-1)t}{2nt} 2^p + \frac{1}{n} = 2^p - \frac{1}{n}\big(2^{p-1} - 1\big).
\end{aligned}$$

Also ist

$$\|T(t) - I\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n(\cdot - t) - f_n\|_p \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(2^p - \frac{1}{n}\big(2^{p-1} - 1\big)\Big)^{1/p} = 2.$$