Übungsblatt 4

08.06.2016

---

16. Zeige, dass die von E gegeben durch

$$E(t,x) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0 & t \le 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

erzeugte Distribution eine Fundamentallösung für $\partial_t - \Delta$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist.

17. Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Zeige

$$W_2^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}^n);\ \left[\xi \mapsto (1 - |\xi|^2)^{m/2} \hat{f}(\xi)\right] \in L_2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

18. Seien $1 \le p < \infty$, $f, g \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Zeige, dass $\partial_j f = g$ genau dann, wenn

$$\frac{f(\cdot + he_j) - f}{h} \to g \quad \text{in } L_p(\mathbb{R}^n).$$

19. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $\Omega := B(0,1)$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \ln\left(\ln \frac{2}{|x|}\right)$ $(x \in \Omega \setminus \{0\})$. Zeige, dass $f \in W_n^1(\Omega)$.

20. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(a,b) := \{f \in L_{1,\mathrm{loc}}(a,b);\ \partial f \in L_{1,\mathrm{loc}}(a,b)\}$. Zeige, dass f einen stetigen Repräsentanten $\tilde{f}$ besitzt, und für diesen gilt dann

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \int_y^x \partial f(t)\, dt \quad (x, y \in (a,b)).$$