Übungsblatt 1

19.04.2016

---

1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, (φ_k) in $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Zeige:

(a) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $\partial^\alpha \varphi_k \to \partial^\alpha \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.

(b) Sei $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Dann $\psi\varphi_k \to \psi\varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.

2. Beweise Satz 1.11: Sei Y ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum mit Hausdorff-Eigenschaft (d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten aus Y existieren disjunkte Umgebungen um diese Punkte), $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

(a) T ist stetig.

(b) Sei (φ_k) in $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_k \to 0$. Dann $T\varphi_k \to 0$ in Y.

(c) Für $K \subseteq \Omega$ kompakt: $T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ ist $\mathcal{T}_K$-stetig.

3. Beweise Folgerung 2.3: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$. Dann ist $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $L_p(\Omega)$.

4. Zeige:

(a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega$. Dann ist $\delta_x\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$, $\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$ linear und stetig.

(b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann ist $u\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$, $u(\varphi) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \partial^n \varphi(n)$ linear und stetig.

(c) Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann ist $u\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$, $u(\varphi) := \int_0^1 \varphi(x)\,dx$ linear und stetig.

5. Zeige: Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definiert

$$\mathcal{P}(\tfrac{1}{x})(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

eine Distribution.