Programmextraktion aus Beweisen: Mittel reeller Zahlen in Zifferndarstellung mit Vorzeichen

Franziskus Wiesnet

9. November 2014

Ziel: Berechnung des Mittelwerts in Zifferndarstellung mit Vorzeichen.

Notation.

$$\mathbf{SD}_2 := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

In folgenden sei i immer ein Element in $\mathbf{SD}_2$

$$P := \left\{ \frac{x+y}{2} \middle| x, y \in {}^{co}I \right\}$$

$$Q := \left\{ \frac{x+y+i}{4} \middle| x, y \in {}^{co}I, i \in \mathbf{SD}_2 \right\}$$

Ziel: $P \subseteq Q \subseteq {}^{co}I$

Lemma. $P \subseteq Q$, also $\forall^{nc}_{x,y \in {}^{co}I} \exists^{r}_{x',y' \in {}^{co}I} \exists_i \left(\frac{x+y}{2} = \frac{x'+y'+i}{4} \right)$

Beweis. Wir haben die Koinduktionsklausel $\forall^{nc}_{x \in {}^{co}I} \exists^{r}_{x' \in {}^{co}I} \exists_d \left(x = \frac{x'+d}{2} \right)$. Ist also $x, y \in {}^{co}I$ gegeben, dann gibt es $x', y' \in {}^{co}I$ sowie d,e mit $x = \frac{x'+d}{2}$ und $y = \frac{y'+e}{2}$. Es folgt $\frac{x+y}{2} = \frac{\frac{x'+d}{2} + \frac{y'+e}{2}}{2} = \frac{x'+y'+d+e}{4}$ und mit $d + e = i$ haben wir die zu zeigende Aussage. □

Lemma. $\forall_i \forall^{nc}_{x,y\in co\mathbf{I}} \exists^{r}_{x',y'\in co\mathbf{I}} \exists_{j,d} \left(\frac{x+y+i}{4} = \frac{\frac{x'+y'+j}{4}+d}{2} \right)$

Beweis. Wir definieren Funktionen
$J : \mathbf{SD} \to \mathbf{SD} \to \mathbf{SD}_2 \to \mathbf{SD}_2$ und
$K : \mathbf{SD} \to \mathbf{SD} \to \mathbf{SD}_2 \to \mathbf{SD}$, die
$\forall_{d,e,i} d + e + 2i = J(d,e,i) + 4K(d,e,i)$ erfüllen:

$$J(d,e,i) = \begin{cases} 2 & d+e+2i = 6,-2 \\ 1 & d+e+2i = 5,1,-3 \\ 0 & d+e+2i = 4,0,-4 \\ -1 & d+e+2i = 3,-1,-5 \\ -2 & d+e+2i = 2,-6 \end{cases}$$

$$K(d,e,i) = \begin{cases} 1 & d+e+2i = 6,5,4,3,2 \\ 0 & d+e+2i = 1,0,-1 \\ -1 & d+e+2i = -2,-3,-4,-5,-6 \end{cases}$$

Wir haben also J, K mit
$\forall_{d,e,i} d + e + 2i = J(d, e, i) + 4K(d, e, i)$. Seien nun i, x, y gegeben. Dann ist $\exists^r_{x',y' \in {}^{co}I} \exists_{j,d} \left(\frac{x+y+i}{4} = \frac{\frac{x'+y'+j}{4}+d}{2} \right)$ zu zeigen.
Durch die Koinduktionsklausel erhalten wir $x', y' \in {}^{co}I$ und $d, e \in \mathbf{SD}$ mit $x = \frac{x'+d}{2}$ und $y = \frac{y'+e}{2}$. Es gilt dann:
$\frac{x+y+i}{4} = \frac{\frac{x'+d}{2}+\frac{y'+e}{2}+i}{4} = \frac{x'+y'+d+e+2i}{8} = \frac{x'+y'+J(d,e,i)+4K(d,e,i)}{8} = \frac{\frac{x'+y'+J(d,e,i)}{4}+K(d,e,i)}{2}$

□

Lemma. $Q \subseteq {}^{co}I$, also $\forall^{nc}_{z}.\exists^{r}_{x,y\in {}^{co}I}\exists_{i}\left(z = \frac{x+y+i}{4}\right) \rightarrow {}^{co}I(z)$

Beweis. Wir verwenden das Coinduktionsaxiom. Das heißt, wir zeigen $Q \subseteq \left\{x \middle| \exists^{r}_{x'\in Q\cup {}^{co}I}\exists_{d}\left(x = \frac{x'+d}{2}\right)\right\}$. Sei also $x = \frac{x'+y'+i}{4} \in Q$ gegeben, dann gibt es nach vorherigem Lemma $z \in Q$ und d mit $\frac{x'+y'+i}{4} = \frac{z+d}{2}$. Also ist $x \in \left\{x \middle| \exists^{r}_{x'\in Q\cup {}^{co}I}\exists_{d}\left(x = \frac{x'+d}{2}\right)\right\}$ □

Das liefert nun folgenden Satz:

Satz. $\forall^{nc}_{x,y}\left({}^{co}I(x) \rightarrow {}^{co}I(y) \rightarrow {}^{co}I\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$

Der Korekursionsoperator ${}^{co}\mathcal{R}$ für $\mathbf{I}$

Wir haben $\mathbf{I} = C\ \mathbf{SD}\ \mathbf{I}$. Das gibt den folgenden Typ für den Korekursionsoperator:

$$ {}^{co}\mathcal{R}^{\tau}_{\mathbf{I}} : \tau \to (\tau \to \mathbf{SD} \times (\mathbf{I} + \tau)) \to \mathbf{I} $$

(Die farbliche Markierung dient dazu, im extrahierten Term später die korrespondieren Terme einfacher zu finden.)

${}^{co}\mathcal{R}^{\tau}_{\mathbf{I}}$ genügt folgender Konversionsregel:

$$ {}^{co}\mathcal{R}^{\tau}_{\mathbf{I}}\, N^{\tau}\, M^{\tau \to \mathbf{SD} \times (\mathbf{I}+\tau)} \mapsto C_{\pi_1(MN)^{\mathbf{SD}}}([id^{\mathbf{I}\to\mathbf{I}}, \lambda_{y^{\tau}}({}^{co}\mathcal{R}^{\tau}_{\mathbf{I}}\, y M)]\pi_2(MN)) $$

Der extrahiere Term des obigen Satzes sieht (nach kleinen Umschreibungen, um die Lesbarkeit zu verbessern) wie folgt aus:

$$\lambda_{v_1,v_0}{}^{co}\mathcal{R}_I^{SD_2\times I\times I}(\mathit{left}\ v_1 + \mathit{left}\ v_0, \mathit{right}\ v_1, \mathit{right}\ v_1)$$
$$\lambda_{i,v,w}(K(\mathit{left}\ v, \mathit{left}\ w, i), (J(\mathit{left}\ v, \mathit{leftw}, i), \mathit{right}\ v, \mathit{right}\ w))$$

Wir wenden diesen nun zur Illustration auf $\frac{1}{4} := 01\overline{0}$ und $\frac{3}{4} := 11\overline{0}$ an. Dabei bezeichne M die untere Zeile im extrahierten Term; diese wird sich nicht ändern.
$(\lambda_{v_1,v_0}{}^{co}\mathcal{R}_I^{SD_2\times I\times I}(\mathit{left}\ v_1 + \mathit{left}\ v_0, \mathit{right}\ v_1, \mathit{right}\ v_1)M)\frac{1}{4}\frac{3}{4}$
$\mapsto {}^{co}\mathcal{R}_I^{SD_2\times I\times I}(1, 1\overline{0}, 1\overline{0})M \mapsto C_{K(1,1,1)}{}^{co}\mathcal{R}_I^{SD_2\times I\times I}(0, \overline{0}, \overline{0})M$
$\mapsto C_1 C_0{}^{co}\mathcal{R}_I^{SD_2\times I\times I}(0, \overline{0}, \overline{0})M \mapsto \ldots \mapsto$
$C_1 C_0 \ldots C_0{}^{co}\mathcal{R}_I^{SD_2\times I\times I}(0, \overline{0}, \overline{0})M$
Damit haben wir das erwartete Ergebnis $1\overline{0}$.

Aus dem extrahierten Term erhalten wir also eine Funktion $f : SD_2 \times I \times I \to I$, die folgende Eigenschaft hat:

$$f(i, d : v, e : w) = C_{K(d,e,i)}(f(J(d, e, i), v, w))$$

Diese berechnet nacheinander alle Stelle des Durchschnittes zweier reeller Zahlen in der Zifferndarstellung mit Vorzeichen. Die Summe beider Zahlen erhalten wir dann durch einen Shift um eine Ziffer nach links.

Auch das Produkt zweier reeller Zahlen können wir ähnlich aber mit einem deutlich komplizierten Beweis berechnen. Hier würde man eine Funktion M mit folgender Eigenschaft erhalten:
Gegeben seien $a : x, y, c : z \in {}^{co}I$ und $i \in SD_2$. Wir schreiben $(d : e : w) := \frac{ay+z+i}{4}$ und $j := 2d + e + c + i$. Dann gilt für M:

$$M(a : x, y, c : z, i) := \begin{cases} 1 : M(x, y, w, j - 4) & \textit{falls } j \geq 3 \\ 0 : M(x, y, w, j) & \textit{sonst} \\ -1 : M(x, y, w, j + 4) & \textit{falls } j \leq -3 \end{cases}$$

M ist dabei zu interpretieren als $M(x, y, z, i) = \frac{xy+z+i}{4}$ und damit ist $xy = 4M(x, y, \overline{0}, 0)$.