Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2025/26
ueb03

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 9. (4 Punkte). Zeigen Sie jeweils durch Angabe einer Herleitung
(a) $(\neg\neg A \to A) \to (\neg\neg B \to B) \to \neg\neg(A \wedge B) \to A \wedge B$
(b) $\forall_{x,y}(Pxy \to Qxy) \to \forall_x\exists_y(Qxy \to Rxy) \to \forall_x\exists_y(Pxy \to Rxy)$

Aufgabe 10. (4 Punkte). Zeigen Sie mittels Induktion über Formeln daß für alle Formeln A gilt

$$\vdash_i \bot \to A.$$

Verwenden Sie dabei die Regeln für die Verknüpfungen $\to$, $\forall$, $\vee$, $\wedge$, $\exists$. Im Existenzfall muß man noch annehmen, daß der Bereich der Objekte nicht leer ist, etwa durch $\exists_x(A \to A)$ mit einem nullstelligen Relationssymbol A.

Aufgabe 11. (4 Punkte). Wir betrachten die Disjunktion, eingeführt durch die Axiome

$$\vee_0^+ \colon A \to A \vee B,$$
$$\vee_1^+ \colon B \to A \vee B,$$
$$\vee^- \colon A \vee B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C,$$

bzw. durch die Regeln

$$\frac{\begin{array}{c}|\, M\\ A\end{array}}{A \vee B}\vee_0^+ \qquad \frac{\begin{array}{c}|\, M\\ B\end{array}}{A \vee B}\vee_1^+ \qquad \frac{\begin{array}{ccc} & [u\colon A] & [v\colon B]\\ |\, M & |\, N & |\, K\\ A \vee B & C & C\end{array}}{C}\vee^- u, v$$

(a) Zeigen Sie, daß die Axiome unter Verwendung der Regeln herleitbar sind.
(b) Ax-Herleitungen seien solche mit $\vee$-Axiomen, aber ohne $\vee$-Regeln. Zeigen Sie
  (i) Zu jeder Ax-Herleitung $M\colon A$ gibt es eine Ax-Herleitung von $A \vee B$.
  (ii) Zu jeder Ax-Herleitung $N\colon B$ gibt es eine Ax-Herleitung von $A \vee B$.
  (iii) Zu Ax-Herleitungen $M\colon A \vee B$, $N\colon C$ und $K\colon C$ mit offenen Annahmen $u\colon A$ in N und $v\colon B$ in K gibt es eine Ax-Herleitung $L\colon C$ in der u, v nicht frei vorkommen.
(c) Folgern Sie, daß bei Hinzunahme der $\vee$-Regeln bzw. der $\vee$-Axiome dieselben Formeln herleitbar sind.

Aufgabe 12. (4 Punkte). Formalisieren Sie die Herleitungen aus den Aufgaben 9 und 10 in Minlog (siehe `ueb03.scm`).

Abgabe. Mittwoch, 5. November 2025 um 8:00 über Uni2work.