

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 1. (4 Punkte). Die Mengen der Terme $\mathcal{T}$ und Formeln $\mathcal{F}$ sind induktiv definiert durch

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &::= x \mid c \mid f^{(n)}\vec{t} \\ \mathcal{F} &::= P^{(n)}\vec{t} \mid A \rightarrow B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_x A \mid \exists_x A\end{aligned}$$

wobei $f^{(n)}$ ein n -stelliges Funktionssymbol und $P^{(n)}$ ein Relationssymbol der Stelligkeit n ist. Definieren Sie rekursiv die Menge $FV(A)$ der freien Variablen von A .

Aufgabe 2. (4 Punkte). Die Höhe $|\cdot|: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ und die Länge $\|\cdot\|: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ sind rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} |P| &:= 1 & \|P\| &= 1 \\ |A \circ B| &:= \max(|A|, |B|) + 1 & \|A \circ B\| &:= \|A\| + \|B\| + 1 \\ |\Box_x A| &:= |A| + 1 & \|\Box_x A\| &:= \|A\| + 1 \end{aligned}$$

für P Primformel, $\circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$ und $\Box \in \{\forall, \exists\}$. Zeigen Sie durch Induktion über Formeln daß für alle Formeln A gilt

$$\|A\| \leq 2^{|A|} - 1$$

Aufgabe 3. (4 Punkte). Bestimmen Sie jeweils alle negativen, positiven und strikt positiven Teilformeln von

$$\begin{aligned} &((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D \\ &\exists_x(Px \wedge (Qx \rightarrow \forall_y(Ry \rightarrow Sy))) \end{aligned}$$

Aufgabe 4. (4 Punkte). Es seien R ein einstelliges und $=, \neq$ zweistellige Relationssymbole. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen.

- (a) R ist nicht leer.
- (b) Es gibt mindestens zwei Elemente in R .
- (c) Es gibt höchstens zwei Elemente in R .
- (d) Es gibt genau zwei Elemente in R .

Abgabe. Mittwoch, 23. Oktober 2025, 8:00 über Uni2work.