

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 49. Es sei $2_0(m) := m$ und $2_{n+1}(m) := 2^{2_n(m)}$. Aus Aufgabe 45 (Blatt 12) ist bekannt, daß die Funktion $f(n) := 2_n(1)$ nicht elementar ist. Man zeige, daß der Graph G_f von f elementar ist. Hinweis. Man beschränke die Existenzquantoren in der definierenden Formel für G_f mit Hilfe der β -Funktion.

Aufgabe 50. Die Verkettung $b * a$ von Folgennummern ist definiert durch

$$b * \langle \rangle := b,$$

$$b * \langle n_0, n_1, \dots, n_k \rangle := \pi(b * \langle n_0, n_1, \dots, n_{k-1} \rangle, n_k) + 1.$$

Man zeige, daß $*$ elementar ist. Hinweis: Man definiere $h(b, a, i)$ durch Rekursion über i :

$$h(b, a, 0) = b,$$

$$h(b, a, i + 1) = \pi(h(b, a, i), (a)_i) + 1$$

und zeige, daß h elementar beschränkt ist.

Aufgabe 51. Man zeige, daß die Klasse $\mathcal{E}$ gegen *beschränkte Wertverlaufsrekursion* abgeschlossen ist. Das heißt: sind h, k gegebene Funktionen in $\mathcal{E}$ und ist f definiert durch

$$f(\vec{m}, n) = h(n, \langle f(\vec{m}, 0), \dots, f(\vec{m}, n-1) \rangle, \vec{m})$$

$$f(\vec{m}, n) \leq k(\vec{m}, n),$$

so ist auch f in $\mathcal{E}$. Hinweis: $\bar{f}(\vec{m}, n) := \langle f(\vec{m}, 0), \dots, f(\vec{m}, n-1) \rangle$ ist durch beschränkte Rekursion definierbar.

Aufgabe 52. Gegeben sei eine Sprache $\mathcal{L}$ mit den Funktionssymbolen $0, S, +, \cdot$ und den Relationssymbolen $\perp$ und $=$. Man definiere eine elementare Funktion s mit der Eigenschaft, daß für jede aus atomaren Formeln mit $\rightarrow, \forall, \exists$ aufgebaute Formel $C = C(z)$ (wobei $z := x_0$) gilt

$$s(\ulcorner C \urcorner, k) = \ulcorner C(\underline{k}) \urcorner.$$

Hinweis: Man definiere s durch beschränkte Wertverlaufsrekursion.

Abgabe. Mittwoch, 30. Januar 2013, in der Vorlesung.