

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 41. Sei π ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$. Man zeige, daß dann für alle Terme t und Formeln A und für jede hinreichend große Belegung η in $|\mathcal{M}|$ gilt

(a) $\pi(t^{\mathcal{M}}[\eta]) =^{\mathcal{M}'} t^{\mathcal{M}'}[\pi \circ \eta]$ und

(b) $\mathcal{M} \models A[\eta] \leftrightarrow \mathcal{M}' \models A[\pi \circ \eta]$.

Aus (b) folgert man, daß für alle $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ gilt

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'.$$

Aufgabe 42. Zugrunde liege eine abzählbare Sprache $\mathcal{L}$. Man zeige: Hat eine $\mathcal{L}$ -Theorie T ein abzählbares Modell, so auch ein überabzählbares (z.B. eines, in dessen Äquivalenzklassen sich die reellen Zahlen injektiv einbetten lassen).

Aufgabe 43. Man zeige, daß es keine geschlossene Formel A geben kann, so daß für alle Modelle $\mathcal{M}$ von $\text{Eq}_{L(A)}$ gilt

$$(\mathcal{M} \models A) \leftrightarrow |\mathcal{M}/\equiv^{\mathcal{M}}| \text{ ist unendlich.}$$

Aufgabe 44. Ein Körper $\mathcal{K}$ heißt (i) von der *Charakteristik* 0, wenn in ihm jedes Vielfache des Einselements vom Nullelement verschieden ist, und (ii) von der *Charakteristik* p , wenn p die kleinste natürliche Zahl ist so, daß das p -fache des Einselements das Nullelement ist. Man zeige: Gilt ein Satz A der Sprache der Körpertheorie in allen Körpern der Charakteristik 0, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, daß A auch in allen Körpern einer Charakteristik $p > n$ gilt.

Abgabe. Mittwoch, 16. Januar 2013, in der Vorlesung.