

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 37. *Geometrische Formeln* sind definiert durch

$$G, H ::= P \mid G \wedge H \mid G \vee H \mid \exists_x G.$$

Eine *geometrische Implikation* hat die Gestalt $\forall_{\vec{x}}(G \rightarrow H)$. Man zeige

- (a) Jede geometrische Formel ist äquivalent zu einer Formel der Gestalt $\exists_{\vec{x}}(B_1 \vee \dots \vee B_n)$ mit B_i Konjunktion atomarer Formeln.
- (b) Jede geometrische Implikation ist äquivalent zu einer Konjunktion von Formeln

$$\forall_{\vec{x}}(B \rightarrow \exists_{\vec{y}}(B_1 \vee \dots \vee B_n))$$

mit B, B_i Konjunktionen atomarer Formeln.

Aufgabe 38. Ein $\mathcal{L}$ -Modell $\mathcal{M}$ erfüllt die Gleichheitsaxiome genau dann, wenn $=^{\mathcal{M}}$ eine *Kongruenzrelation* ist (d.h., eine mit den Funktionen und Relationen von $\mathcal{M}$ verträgliche Äquivalenzrelation). Das Koinzidenzlemma gilt auch mit $=^{\mathcal{M}}$ anstelle von $=$: Seien η und ξ zwei Belegungen in $|\mathcal{M}|$ so daß $\text{dom}(\eta) = \text{dom}(\xi)$ und $\eta(x) =^{\mathcal{M}} \xi(x)$ für alle $x \in \text{dom}(\eta)$. Man zeige

- (a) $t^{\mathcal{M}}[\eta] =^{\mathcal{M}} t^{\mathcal{M}}[\xi]$ falls $\text{vars}(t) \subseteq \text{dom}(\eta)$.
- (b) $\mathcal{M} \models A[\eta] \leftrightarrow \mathcal{M} \models A[\xi]$ falls $\text{FV}(A) \subseteq \text{dom}(\eta)$.

Aufgabe 39. Man zeige:

- (a) Für jede nicht-leere Menge M ist $U_a = \{ X \subseteq M \mid a \in X \}$ ein Ultrafilter über M .
- (b) Man zeige, daß es für jede unendliche Menge M einen Ultrafilter geben muß, der nicht von der Form U_a für ein $a \in M$ ist.
- (c) Es sei M eine unendliche Menge und U Ultrafilter nicht von der Form U_a für ein $a \in M$. Man zeige, daß jedes $X \in U$ eine unendliche Teilmenge von M ist.

Aufgabe 40. Wir arbeiten in einer Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol E und der Gleichheit $=$.

- (a) Man gebe eine Axiomatisierung einer Theorie T an, die besagt, daß E eine Äquivalenzrelation mit unendlich vielen Äquivalenzklassen ist, die jeweils unendlich viele Elemente enthalten.
- (b) Man zeige, daß je zwei abzählbare Modelle von T isomorph sind, und daß T keine endlichen Modelle hat.
- (c) Man folgere mit Hilfe des Satzes von Löwenheim-Skolem, daß die Theorie T vollständig ist.

*** Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr! ***

Abgabe. Mittwoch, 9. Januar 2013, in der Vorlesung.