

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 33. Die Menge $\text{Eq}_{\mathcal{L}}$ der $\mathcal{L}$ -Gleichheitsaxiome besteht aus den universellen Abschlüssen von

$$\begin{aligned}x &= x && \text{(Reflexivität),}\\x &= y \rightarrow y = x && \text{(Symmetrie),}\\x &= y \rightarrow y = z \rightarrow x = z && \text{(Transitivität),}\\x_1 &= y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n),\\x_1 &= y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n),\end{aligned}$$

für alle n -stelligen Funktionssymbole f und Relationssymbole R der Sprache $\mathcal{L}$. Man zeige (ohne Verwendung des Vollständigkeitssatzes), daß die folgenden Formeln aus $\text{Eq}_{\mathcal{L}}$ herleitbar sind:

- (a) $t = s \rightarrow r(t) = r(s)$,
- (b) $t = s \rightarrow (A(t) \leftrightarrow A(s))$.

Aufgabe 34. (a) Es sei M eine unendliche Menge. Man zeige, daß das Mengensystem $F := \{X \subseteq M \mid M \setminus X \text{ endlich}\}$ ein Filter ist (der *Fréchet Filter* auf M).

(b) Man gebe eine unendliche Menge M und eine unendliche Familie S von Teilmengen von M an, so daß

- (i) S die endliche Durchschnittseigenschaft hat und
- (ii) S echt in dem Fréchet Filter über M enthalten ist.

(c) Man gebe eine unendliche Menge M und Teilmengen $X, Y \subseteq M$ an, so daß $X \cup Y$, aber weder X noch Y Elemente des Fréchet Filters über M sind.

Aufgabe 35. Es sei M eine nicht leere Menge und F ein Filter über M . Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (a) F ist ein Ultrafilter.
- (b) F ist ein Primfilter (d.h., $\forall X, Y \subseteq M (X \cup Y \in F \rightarrow X \in F \vee Y \in F)$).
- (c) F ist ein maximaler Filter (d.h., für jeden Filter $G \supseteq F$ gilt $G = F$).

Aufgabe 36. Es sei T die Menge aller endlichen Folgen $\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ (einschließlich der leeren Folge). Über T betrachten wir die konstanten Baummodelle $\mathcal{T} := (D, I_0, I_1)$ mit $R^{\mathcal{T}}(\vec{a}, k)$ unabhängig von k . Es sei $\mathcal{M} := (D, I_0, I_1^c)$ mit $I_1^c(\vec{a}) := R^{\mathcal{M}}(\vec{a}) := R^{\mathcal{T}}(\vec{a}, \langle \rangle)$. Man zeige für alle Formeln A (ohne $\vee, \exists$) und alle Belegungen η

$$\mathcal{T} \models A[\eta] \quad \text{gdw} \quad \mathcal{M} \models A[\eta].$$

Abgabe. Mittwoch, 19. Dezember 2012, in der Vorlesung.