

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 25. Es seien $\mathcal{T}$ ein Baummodell, t ein Term, A eine Formel und η Belegung in $|\mathcal{T}|$. Man zeige, daß aus $k \Vdash A[\eta]$ und $k \preceq k'$ folgt $k' \Vdash A[\eta]$.

Aufgabe 26. Es seien $\mathcal{T}$ ein Baummodell, t ein Term, A eine Formel und η, ξ Belegungen in $|\mathcal{T}|$. Man zeige:

- (a) Gilt $\eta(x) = \xi(x)$ für alle $x \in \text{vars}(t)$, so ist $\eta(t) = \xi(t)$.
- (b) Gilt $\eta(x) = \xi(x)$ für alle $x \in \text{FV}(A)$, so gilt $\mathcal{T}, k \Vdash A[\eta]$ genau dann, wenn $\mathcal{T}, k \Vdash A[\xi]$.

Aufgabe 27. Man zeige durch Angabe eines Baummodells

- (a) $\not\models_i P \vee \neg P$.
- (b) $\not\models_i ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$.

Aufgabe 28. Sei A ein fest gewähltes Aussagensymbol. Für natürliche Zahlen k definieren wir die Formel kA durch $0A := A$, $(k+1)A := (kA \rightarrow kA)$. Es sei u_k eine Annahmenvariable für kA . Die Höhe $|M|$ einer Herleitung M wird definiert durch

$$\begin{aligned} |u| &:= 1, \\ |\lambda_u M| &:= |\lambda_x M| := |Mr| := |M| + 1, \\ |MN| &:= \max(|M|, |N|) + 1, \end{aligned}$$

- (a) Für $k = 0, 1, 2$ gebe man Herleitungen $M_k(u_k)$ in langer Normalform von kA aus u_k an, und berechne ihre Höhe.
- (b) Man konstruiere allgemein eine Herleitung $M_{k+1}(u_{k+1})$ aus $M_k(u_k)$ (beide in langer Normalform).
- (c) Man finde eine Rekursionsformel für die Höhe von $M_k(u_k)$.

Abgabe. Mittwoch, 5. Dezember 2012, in der Vorlesung.