

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 21. Man zeige

- (a) $\vdash A \tilde{\vee} \neg A$.
- (b) $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$.

Aufgabe 22. Man leite die Peirce-Formel $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ her aus $\neg\neg P \rightarrow P$ und $\perp \rightarrow Q$.

Aufgabe 23. Man zeige, daß die Einschrittreduktion $\rightarrow$ zwischen Herleitungen *nicht* konfluent ist. (Hinweis: Man betrachte etwa die Herleitung

$$\frac{\frac{u_0: B \rightarrow B \rightarrow C \quad u: B}{B \rightarrow C} \quad \frac{C}{B \rightarrow C} \rightarrow^+ u \quad \frac{\frac{v: B}{B \rightarrow B} \rightarrow^+ v \quad w_0: B}{B}}{C}$$

und schreibe sie als Herleitungsterm.)

Aufgabe 24. Sei A ein fest gewähltes Aussagensymbol. Für natürliche Zahlen k definieren wir die Formel kA durch $0A := A$, $(k+1)A := (kA \rightarrow kA)$. Die *Church-Numerale* $\bar{n}_k$ seien definiert durch

$$\bar{n}_k := \lambda_{v,kA \rightarrow kA} \lambda_{u,kA} (v^n u) \quad \text{mit } v^0 u := u, v^{n+1} u := v(v^n u).$$

(a) Man gebe den Herleitungsbaum für $\bar{3}_0$ an.

$\rightarrow_\beta$ sei der Abschluß von $\mapsto_\beta$, also definiert durch

- (i) Wenn $M \mapsto_\beta M'$, so $M \rightarrow_\beta M'$.
- (ii) Wenn $M \rightarrow_\beta M'$, so $MN \rightarrow_\beta M'N$, $NM \rightarrow_\beta NM'$, $\lambda_v M \rightarrow_\beta \lambda_v M'$.

$=_\beta$ sei die von $\rightarrow_\beta$ erzeugte Äquivalenzrelation (also die kleinste Äquivalenzrelation auf Herleitungstermen, die $\rightarrow_\beta$ enthält). Man zeige

- (b) $\bar{n}_k v (\bar{m}_k v u) =_\beta (\bar{m} + \bar{n})_k v u$. (Ind. nach n , mit $(\bar{n} + \bar{1})_k v u =_\beta v(\bar{n}_k v u)$.)
- (c) $\bar{n}_k (\bar{m}_k v) =_\beta (\bar{m} \bar{n})_k v$. (Ind. nach n , mit (b) und $\bar{n}_k v =_\beta \lambda_u (\bar{n}_k v u)$.)
- (d) $\bar{m}_{k+1} \bar{n}_k =_\beta (\bar{n}^m)_k$ für $m \geq 1$. (Aus (c) durch Induktion nach m .)

Abgabe. Mittwoch, 28. November 2012, in der Vorlesung.