

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

- Aufgabe 13** (Sprachen der Gruppentheorie). (a) Eine formale Sprache $\mathcal{L}$ sei bestimmt durch ein zweistelliges Funktionssymbol $\circ$ und ein zweistelliges Relationssymbol $=$. Man formalisiere in $\mathcal{L}$: Es gibt ein Element e mit folgenden Eigenschaften: (i) e ist Linkseinheit (d.h., multipliziert man es von links an ein beliebiges Element, so reproduziert sich dieses). (ii) Jedes Element x hat bzgl. e ein Linksinverses, d.h. ein Element y , das von links an x heranmultipliziert e ergibt.
- (b) Man kann die in (a) implizit geforderte Existenz durch „Skolemisierung“ explizit machen: $\mathcal{L}'$ sei bestimmt durch die Funktionssymbole e (nullstellig) sowie $\circ$ und g (zweistellig), und ein zweistelliges Relationssymbol $=$, wobei e eine Linkseinheit und $g(x, e)$ ein Linksinverses von x bzgl. e bedeuten sollen. Man formalisiere (i), (ii) aus (a) in $\mathcal{L}'$.

Aufgabe 14. Man zeige

- (a) $\vdash A \rightarrow A \tilde{\vee} B, \vdash B \rightarrow A \tilde{\vee} B$.
(b) $\vdash A \rightarrow \tilde{\exists}_x A$.

Für die gefundenen Herleitungen gebe man Herleitungsterme an.

Aufgabe 15. Man zeige

- (a) $\vdash (A \tilde{\vee} B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$,
(b) $\vdash (\neg \neg C \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \tilde{\vee} B \rightarrow C$,
(c) $\vdash (\perp \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B \tilde{\vee} C) \rightarrow (A \rightarrow B) \tilde{\vee} (A \rightarrow C)$,
(d) $\vdash (A \rightarrow B) \tilde{\vee} (A \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B \tilde{\vee} C$.

Für die in (d) gefundene Herleitung gebe man einen Herleitungsterm an.

Aufgabe 16. Die in der Vorlesung (1.1.3) gegebene Definition von positiven (negativen) Teilformeln bezieht sich auf *Vorkommen* dieser Formeln. Für ein Relationssymbol R definieren wir „ R ist positiv (negativ) in A “ (A im $\rightarrow, \forall$ -Fragment) durch Induktion über A :

- (i) R ist positiv in $P\vec{s}$.
(ii) R ist negativ in $P\vec{s}$ gdw R verschieden von P ist.
(iii) R ist positiv (negativ) in $A \rightarrow B$ gdw R negativ (positiv) in A und positiv (negativ) in B ist.
(iv) R ist positiv (negativ) in $\forall_x A$ gdw R positiv (negativ) in A ist.

Man zeige

- (a) R ist positiv (negativ) in A gdw jedes Vorkommen eines $R\vec{t}$ in A positiv (negativ) ist.
(b) Es sei R positiv in $A(R)$. Dann gilt $\vdash \forall_{\vec{x}}(R\vec{x} \rightarrow S\vec{x}) \rightarrow A(R) \rightarrow A(S)$.

Abgabe. Mittwoch, 14. November 2012, in der Vorlesung.