

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 1. Eine unendliche Folge $(d_n)_n$ mit $d_n \in \mathbf{SD} := \{-1, 0, 1\}$ heißt eine *Stromdarstellung* von $x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{2^{n+1}}$. Man zeige

- (a) $x \in [-1, 1]$.
- (b) Die Stromdarstellung von reellen Zahlen in $[-1, 1]$ ist nicht notwendig eindeutig.
- (c) Gibt es reelle Zahlen in $[-1, 1]$ mit eindeutiger Stromdarstellung?
- (d) 0 hat unendliche viele Stromdarstellungen.

Aufgabe 2. Mit d, e bezeichnen wir Elemente aus $\mathbf{SD} := \{-1, 0, 1\}$, und mit i, j Elemente aus $\mathbf{SD}_2 := \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Es seien

$$x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{2^{n+1}}, \quad y := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{2^{n+1}}.$$

Sei noch $i \in \mathbf{SD}_2$ gegeben. Man zeige, daß es d, j gibt mit

$$\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{i}{2}}{2} = \frac{\frac{\frac{x_1+y_1}{2} + \frac{j}{2}}{2} + d}{2}.$$

Hinweis:

$$x_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{n+1}}{2^{n+1}}, \quad y_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Aufgabe 3. Man formalisiere folgende Aussagen ($\forall_x$: für alle Mengen x ; $x \in y$: x ist Element von y ; $x = y$: x ist gleich y).

- (a) Es gibt eine Menge ohne Elemente.
- (b) Zu je zwei Mengen x_1, x_2 gibt es eine Menge x , deren Elemente genau x_1 und x_2 sind.
- (c) Zu jeder Menge x gibt es eine Menge y , die aus den Elementen aller Elemente von x besteht.
- (d) Zu jeder Menge x gibt es eine Menge y , deren Elemente genau die Teilmengen von x sind.

Aufgabe 4. Die *Höhe* $|A|$ einer Formel A ist definiert durch $|P| = 0$ für atomare P , $|A \circ B| = \max(|A|, |B|) + 1$ für binäre Operatoren $\circ$ (also $\rightarrow, \wedge, \vee$) und $|\circ A| = |A| + 1$ für einstellige Operatoren $\circ$ (also $\forall_x, \exists_x$). Die *Länge* $\|A\|$ einer Formel A ist definiert durch $\|P\| = 1$ für atomare P , $\|A \circ B\| = \|A\| + \|B\|$ für binäres $\circ$ und $\|\circ A\| = \|A\| + 1$ für einstelliges $\circ$. Man zeige $\|A\| + 1 \leq 2^{|A|+1}$.

Abgabe. Mittwoch, 24. Oktober 2012, in der Vorlesung.