Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg
Valentin Herrmann

Sommersemester 2025
ueb04

Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

Aufgabe 13. (4 Punkte) Beweisen Sie in Minlog `NatQRProp`:

```
all m(0<m -> all n(
  n=lft(NatQR n m)*m+rht(NatQR n m) andb rht(NatQR n m)<m))
```

In Aufgabe 9 wurde `NatQR` definiert und die Totalität bewiesen.

Aufgabe 14. (4 Punkte) Es seien $\mathbb{B}$ und $\mathbb{Y}$ wie in der Vorlesung definiert, und $\mathbb{S}_\mathbb{B}$ durch den Konstruktor $\mathrm{S}\colon \mathbb{B} \to \xi \to \xi$. Geben Sie eine approximierbare Abbildung r von $\boldsymbol{A}_{\iota_{\mathbb{S}_\mathbb{B}}}$ nach $\boldsymbol{A}_{\iota_\mathbb{Y}}$ an und zeigen Sie, daß die zugehörige (Scott-) stetige Funktion $|r|\colon |\boldsymbol{A}_{\iota_{\mathbb{S}_\mathbb{B}}}| \to |\boldsymbol{A}_{\iota_\mathbb{Y}}|$ auf den nicht-leeren Idealen injektiv ist.

Aufgabe 15. (4 Punkte)

(a) Geben Sie zu dem Grundtyp $\mathbb{P}$ der (binären) positiven Zahlen (mit den Konstruktoren $\mathrm{One}\colon \xi$, $S_0\colon \xi \to \xi$, $S_1\colon \xi \to \xi$) das Informationssystem $\boldsymbol{A}_\mathbb{P}$ durch seine Bestandteile $A_\mathbb{P}$, $\mathrm{Con}_\mathbb{P}$ und $\vdash_\mathbb{P}$ an.

(b) Wie sind die approximierende Abbildung r_{S_i} und die Werte $|r_{S_i}|(z)$ der zugehörigen stetigen Funktion von $|\mathbb{P}|$ nach $|\mathbb{P}|$ definiert?

(c) Beweisen Sie, daß $|r_{S_i}|$ injektiv ist, und daß die Wertebereiche von $|r_{S_0}|$ und $|r_{S_1}|$ disjunkt sind.

Aufgabe 16. (4 Punkte) Es sei $\mathbb{Y}$ die Algebra der binären Bäume, und x, x' Variablen vom Typ $\mathbb{Y}$. Beweisen Sie informal

$$x \approx_\mathbb{Y} x' \leftrightarrow x, x' \in {}^{\mathrm{co}}T_\mathbb{Y} \wedge x \equiv x'.$$

Hinweis. Verwenden Sie für „$\to$“ das Bisimilaritätslemma, ${}^{\mathrm{co}}T^+_\mathbb{Y}$ mit $X := \{\, x \mid \exists_{x'}(x \approx_\mathbb{Y} x') \,\}$ und $\approx^-_\mathbb{Y}$. Für „$\leftarrow$“ verwenden Sie $\approx^+_\mathbb{Y}$ mit $X := \{\, x, x' \mid x \in {}^{\mathrm{co}}T_\mathbb{Y} \wedge x \equiv x' \,\}$ sowie ${}^{\mathrm{co}}T^-_\mathbb{Y}$.

Abgabe. Mittwoch, 28. Mai 2025, 8:00. Eine Lösungshilfe für Aufgabe 13 finden Sie in quotremprop.scm auf der Vorlesungsseite. Die Lösungen für die Aufgaben 14-16 als `pdf`-Datei und für 13 als `scm`-Datei bitte abgeben über Uni2work.