

## Übungen zur Vorlesung „Logik II: Beweise und Programme“

**Aufgabe 9.** (4 Punkte) Es sei  $\text{NatQR}$  definiert durch

```
(add-program-constant "NatQR" (py "nat=>nat=>nat yprod nat"))
(add-computation-rules
  "NatQR 0 m" "0 pair 0"
  "NatQR(Succ n)m"
  "([nm] [if (Succ rht nm<m)
              (lft nm pair Succ rht nm)
              (Succ lft nm pair 0)])"
  (NatQR n m))
```

Beweisen Sie in Minlog

- (a) die Totalität von  $\text{NatQR}$ ,
- (b) die Eindeutigkeit der Division mit Rest:

```
all n,m,l,n0,l0(
  n*m+l=n0*m+l0 -> l<m -> l0<m -> n=n0 andb l=l0)
```

**Aufgabe 10.** (4 Punkte) Beweisen Sie, daß für approximierbare Abbildungen  $r$  und  $s$  und für stetige Funktionen  $f$  und  $g$  folgendes gilt.

- (a)  $s \circ r := \{ (U, c) \mid \exists V ((V, c) \in s \wedge (U, V) \subseteq r) \}$  ist eine approximierbare Abbildung (wobei  $(U, V) := \{ (U, b) \mid b \in V \}$ ), und
- (b)  $|s \circ r| = |s| \circ |r|$ ,  $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$ .

**Aufgabe 11.** (4 Punkte)

- (a) Formulieren Sie für den Grundtyp  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen die Klauseln  $(T_{\mathbb{N}})_i^+$  ( $i = 0, 1$ ) und die Eigenschaft vom kleinsten Fixpunkt  $(T_{\mathbb{N}})_0^-$ .
- (b) Formulieren Sie die Abschluß-Eigenschaft  ${}^{\text{co}}T_{\mathbb{N}}^-$  und die Eigenschaft vom größten Fixpunkt  ${}^{\text{co}}T_{\mathbb{N}}^+$ .
- (c) Beweisen Sie  $T_{\mathbb{N}} \subseteq {}^{\text{co}}T_{\mathbb{N}}$ .

**Aufgabe 12.** (4 Punkte) Der Grundtyp  $\iota_k$  sei gegeben durch den Konstruktor  $C_k: (\xi)_{i < k} \rightarrow \xi$ .

- (a) Beweisen Sie, daß alle nicht-leeren cototalen Ideale  $x \in |\mathbf{A}_{\iota_1}|$  unendlich sind.
- (b) Angenommen alle Ideale in  $x \in |\mathbf{A}_{\iota_k}|$  sind endlich. Beweisen Sie, daß dann der Grundtyp  $\iota_k$  nicht rekursiv ist, also  $k = 0$ .

**Abgabe.** Mittwoch, 21. Mai 2025, 8:00. Eine Lösungshilfe für die Minlog-Aufgabe ist `quotremuniq.scm` auf der Vorlesungsseite. Die Lösungen für die Aufgaben 10-12 als `pdf`-Datei und für 9 als `scm`-Datei bitte abgeben über Uni2work.