



Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

SS 23
July 13, 2023

Mathematische Logik II

Letztes Blatt

Abgabe. Mittwoch, 19. Juli 2023, 10:15, in Uni2Work oder in der Vorlesung.

Besprechung. Freitag, 21. Juli 2023, 8:30, A027.

Letzte Aufgabe (16 Punkte). Wir betrachten folgend das induktive Prädikat $\mathcal{C}$, der Stelligkeit $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, zur Darstellung letztendlich konstanter (eventually constant) Funktionen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Formal definieren wir

$$\mathcal{C} := \mu_X \left[\forall_{m \in \mathbf{T}_{\mathbb{N}, f}} (\forall_n (f n \equiv m) \rightarrow X f), \right. \\ \left. \forall_{n \in \mathbf{T}_{\mathbb{N}, f, g}} (X f \rightarrow g 0 \equiv n \rightarrow \forall_m (g (S m) \equiv f m) \rightarrow X g) \right],$$

d.h., konstante funktionen $(\lambda_n m) \in \mathcal{C}$ und Erweiterung bereits bekannter funktion:

$$\left. \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}, \\ g 0 = n \in \mathbf{T}_{\mathbb{N}}, \\ g (S m) = f m. \end{array} \right\} \Rightarrow g \in \mathcal{C}$$

a) Geben sie die zu $\mathcal{C}$ gehörigen Axiome $(\mathcal{C})_i^+$ ($i = 0, 1$) und $(\mathcal{C})^- [P]$ an. Zeigen sie die folgenden Aussagen

$$\vdash \forall_f (f \in \mathcal{C} \rightarrow \forall_{n \in \mathbf{T}_{\mathbb{N}}} (f n) \in \mathbf{T}_{\mathbb{N}}), \\ \vdash \forall_f (f \in \mathcal{C} \rightarrow \exists_m (m \in \mathbf{T}_{\mathbb{N}} \wedge \forall_n (m <_{\mathbb{N}} n \rightarrow f n \equiv f k))), \\ \vdash \forall_f (\forall_{n \in \mathbf{T}_{\mathbb{N}}} (f n) \in \mathbf{T}_{\mathbb{N}} \rightarrow \exists_m (m \in \mathbf{T}_{\mathbb{N}} \wedge \forall_n (m <_{\mathbb{N}} n \rightarrow f n \equiv f k) \rightarrow f \in \mathcal{C})),$$

d.h., $f \in \mathcal{C}$ ist äquivalent zu Totalität zusammen mit einem Zeugen $m \in \mathbf{T}_{\mathbb{N}}$, so dass $\lambda_n f (n+m)$ konstant ist. Hierbei ist $<_{\mathbb{N}}$ wie in Aufgabe 19 (Blatt 6) definiert. (*Hinweis.* Einfach herzuleitende Fakten wie z.b. $\vdash S n <_{\mathbb{N}} S m \rightarrow n <_{\mathbb{N}} m$ oder $\vdash n <_{\mathbb{N}} m \rightarrow \exists_k m \equiv S k$ dürfen frei verwendet werden)

b) Bestimmen sie $\tau(\mathcal{C})$ und geben sie die Berechnungsregeln des Terms

$$et((\mathcal{C})^- [P]) = \text{Rec}_{\tau(\mathcal{C})}^{\rho}$$

für $P \subseteq (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ mit $\tau(P) = \rho$ an. Geben sie die extrahierten Terme der Herleitungen aus Teilaufgabe **a)** an. Definieren sie diese ferner (möglichst) direkt als Programmkonstanten.

c) Beweisen sie, dass $\mathcal{C}$ abgeschlossen ist bezüglich Komposition $(f \circ g) n = f (g n)$ i.e.,

$$\vdash \forall_{f, g} (f \in \mathcal{C} \rightarrow g \in \mathcal{C} \rightarrow (f \circ g) \in \mathcal{C}).$$

Bestimmen sie den extrahierten Term $et(M)$ ihrer Herleitung und geben sie die entsprechende Korrektheitsaussage nach Theorem 4.1.2 an.

d) Formalisieren sie die Teilaufgaben **a)** und **b)** in Minlog.