



Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

SS 23
July 5, 2023

Mathematische Logik II

Blatt 10

Abgabe. Mittwoch, 12. Juli 2023, 10:15, in Uni2Work oder in der Vorlesung.

Besprechung. Freitag, 14. Juli 2023, 8:30, A027.

Aufgabe 29 (4 Punkte). Die Prädikate $\mathbf{Od}^r$ und $\mathbf{Ev}^r$ sind gegeben durch

$$\mathbf{Od}^r := \mu_{X^r} [X^r(S0)0, \forall_{n,m} (X^r nm \rightarrow X^r(SSn)(Sm))],$$

$$\mathbf{Ev}^r := \mu_{X^r} [X^r 00, \forall_{n,m} (X^r nm \rightarrow X^r(SSn)(Sm))],$$

wobei $\tau(\mathbf{Ev}) = \tau(\mathbf{Od}) = \mathbb{N}$. Ferner sei $D : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die Verdopplungsfunktion mit Berechnungsregeln

$$D 0 = 0, \quad D(Sn) = SS(Dn).$$

Zeigen sie

$$\vdash (\lambda_n S(Dn)) \mathbf{r} \forall_n (n \in \mathbf{Od} \rightarrow (Dn) \in \mathbf{Ev}).$$

Aufgabe 31 (4 Punkte). Seien $\mathbf{T}_{\mathbb{L}[\mathbb{B}]} \subseteq \mathbb{L}[\alpha]$, $\mathbf{Rev} \subseteq (\mathbb{L}[\mathbb{B}], \mathbb{L}[\mathbb{B}])$ die induktiven Prädikate

$$\mathbf{T}_{\mathbb{L}[\mathbb{B}]} := \mu_Y [Y[], \forall_{b,u} (b \in \mathbf{T}_{\mathbb{B}} \rightarrow Yu \rightarrow Y(b :: u))],$$

$$\mathbf{Rev} := \mu_Z [Z[[]], \forall_{b,u,v} (b \in \mathbf{T}_{\mathbb{B}} \rightarrow Zuv \rightarrow Z(x :: u)(v * x))],$$

und $*$: $\mathbb{L}[\mathbb{B}] \rightarrow \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{L}[\mathbb{B}]$ mit Regeln

$$[] * b = (b :: []), \quad (a :: u) * b = a :: (u * b).$$

Geben sie jeweils den Typ $\tau(\mathbf{T}_{\mathbb{L}[\mathbb{B}]})$, $\tau(\mathbf{Rev})$ und die Axiome der Prädikate $\mathbf{T}_{\mathbb{L}[\mathbb{B}]}^r$ und $\mathbf{Rev}^r$ an. Zeigen sie

$$\vdash \forall_u (u \in \mathbf{T}_{\mathbb{L}[\mathbb{B}]} \rightarrow \exists_v (\mathbf{Rev} uv)).$$

Definieren sie eine Programmkonstante $\mathbf{rev} : \tau(\mathbf{T}_{\mathbb{L}[\mathbb{B}]}) \rightarrow \tau(\mathbf{Rev})$, so dass

$$\vdash \mathbf{rev} \mathbf{r} \forall_u (u \in \mathbf{T}_{\mathbb{L}[\mathbb{B}]} \rightarrow \exists_v (\mathbf{Rev} uv)).$$

Aufgabe 32 (4 Punkte). Wir betrachten die Prädikate $\text{CupR}_{X^{\text{nc}}, Y}$ und $\text{CupD}_{X^{\text{nc}}, Y^{\text{r}}}$,

$$A^{\text{nc}} \wedge^r B = \text{CapR}_{\{|A^{\text{nc}}\}, \{|B\}} := \mu_Z [A^{\text{nc}} \rightarrow B \rightarrow Z],$$

$$\{z \mid z^{\text{r}} (A \wedge^r B)\} = \text{CupD}_{\{|A^{\text{nc}}\}, \{|b \mid B^{\text{r}} b\}} := \mu_{Z^{\text{r}}} [A^{\text{nc}} \rightarrow Z^{\text{r}} \text{Inl}, \forall_b (B^{\text{r}} b \rightarrow Z^{\text{r}} (\text{InR } y))],$$

wobei

$$\tau(A^{\text{nc}} \wedge^r B) = \tau(\text{CupR}_{\{|A^{\text{nc}}\}, \{|b \mid B^{\text{r}} b\}}^{\text{r}}) = \mu_{\xi} [\text{Inl} : \xi, \text{InR} : \tau(B) \rightarrow \xi].$$

Zeigen sie

$$\vdash \forall_z (z^{\text{r}} (A \vee^r B) \leftrightarrow (z \equiv \text{Inl} \wedge^{\text{nc}} A) \vee^{\text{nc}} \exists_b^{\text{nc}} (z \equiv (\text{InR } b) \wedge^{\text{nc}} b^{\text{r}} B)).$$

Aufgabe 33 (4 Punkte). Formalisieren sie Aufgabe 31 in Minlog.