



Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

SS 23
9. Juni 2023

Mathematische Logik II

Blatt 6

Abgabe. Mittwoch, 13. Juni 2023, 10:15, in Uni2Work oder in der Vorlesung.

Besprechung. Freitag, 15. Juni 2023, **8:30**, A027.

Aufgabe 19 (6 Punkte). Für die Algebra $\mathbb{N} := \mu_{\xi}[0 : \xi, S : \xi \rightarrow \xi]$ definieren wir induktiv die zweistelligen Relationen $<_{\mathbb{N}}, \leq_{\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} <_{\mathbb{N}} &:= \mu_Y [\forall_m Y 0(Sm), \forall_{n,m} (Ynm \rightarrow Y(Sn)(Sm))], \\ \leq_{\mathbb{N}} &:= \mu_Z [\forall_n Znn, \forall_{n,m} (n <_{\mathbb{N}} Sm \rightarrow Znm)], \end{aligned}$$

mit den Axiomen

$$\begin{aligned} (<_{\mathbb{N}})_0^+ : \forall_m 0 <_{\mathbb{N}} Sm & \quad (<_{\mathbb{N}})_1^+ : \forall_{n,m} (n <_{\mathbb{N}} m \rightarrow Sn <_{\mathbb{N}} Sm) \\ (\leq_{\mathbb{N}})_0^+ : \forall_n n \leq_{\mathbb{N}} n & \quad (\leq_{\mathbb{N}})_1^+ : \forall_{n,m} (n <_{\mathbb{N}} Sm \rightarrow n \leq_{\mathbb{N}} m) \\ (<_{\mathbb{N}})^-[R] : \forall_m R(0, Sm) \rightarrow \forall_{n,m} (n <_{\mathbb{N}} m \rightarrow R(n, m) \rightarrow R(Sn, Sm)) \rightarrow <_{\mathbb{N}} \subseteq R \\ (\leq_{\mathbb{N}})^-[R] : \forall_n R(n, n) \rightarrow \forall_{n,m} (n <_{\mathbb{N}} (Sm) \rightarrow R(n, m)) \rightarrow \leq_{\mathbb{N}} \subseteq R \end{aligned}$$

Zeigen sie damit

$$\vdash \forall_{n,m} (n <_{\mathbb{N}} m \rightarrow n <_{\mathbb{N}} Sm), \quad \vdash \forall_m 0 \leq_{\mathbb{N}} m, \quad \vdash \forall_{n,m} (n \leq_{\mathbb{N}} m \rightarrow Sn \leq_{\mathbb{N}} Sm).$$

Dabei dürfen sie auch informal argumentieren, geben sie aber explizit die verwendeten Einführungs- bzw. Beseitigungsaxiome an.

Aufgabe 20 (6 Punkte). Der *reflexiv-transitive Abschluss* einer zweistelligen Relation $\prec$ mit Stelligkeit (α, α) kann induktiv als

$$\mathbf{C}_{\prec} := \mu_X [\forall_x Xxx, \forall_{x,y,z} (x \prec y \rightarrow Xyz \rightarrow Xxz)]$$

definiert werden. Die dazugehörigen Axiome sind

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_{\prec})_0^+ : \forall_x \mathbf{C}_{\prec}xx, & \quad (\mathbf{C}_{\prec})_1^+ : \forall_{x,y,z} (x \prec y \rightarrow \mathbf{C}_{\prec}yz \rightarrow \mathbf{C}_{\prec}xz), \\ (\mathbf{C}_{\prec})^-[Z] : \forall_{x,y,z} (x \prec y \rightarrow \mathbf{C}_{\prec}yz \rightarrow Zyz \rightarrow Zxz) \rightarrow \mathbf{C}_{\prec} \subseteq Z, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{C}_{\prec} \subseteq Z : \Leftrightarrow \forall_{x,y} (\mathbf{C}_{\prec}xy \rightarrow Zxy)$. Beweisen sie, dass $\mathbf{C}_{\prec}$ tatsächlich ein (reflexiv-) transitiver Abschluss von $\prec$ ist, d.h.

$$(\vdash \forall_x \mathbf{C}_{\prec}xx) \quad \vdash \forall_{x,y} (x \prec y \rightarrow \mathbf{C}_{\prec}xy), \quad \vdash \forall_{x,y,z} (\mathbf{C}_{\prec}xy \rightarrow \mathbf{C}_{\prec}yz \rightarrow \mathbf{C}_{\prec}xz).$$

Aufgabe 21 (4 Punkte). Formalisieren sie Aufgabe 19.