



Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

SS 23
31. Mai 2023

Mathematische Logik II

Blatt 5

Abgabe. Mittwoch, 6. Juni 2023, 10:15, in Uni2Work oder in der Vorlesung.

Besprechung. Freitag, 8. Juni 2023, **8:30**, A027.

Aufgabe 17 (4 Punkte). Wir definieren $[\mathbf{nif}(\dots)] : \mathbb{B} \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$ durch

$$[\mathbf{nif} \mathbf{f}(\dots)] = \lambda_{x,y} x, \quad [\mathbf{nif} \mathbf{t}(\dots)] = \lambda_{x,y} y.$$

Ferner sei das *Selektions-funktional* $\eta : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch die Regel

$$\eta(G) = [\mathbf{nif}(G \ 0)](0 ; (\mathbf{S}(\eta(\mathbf{S} \circ G))))$$

d.h., η versucht, für $G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}$, eine minimale Nullstelle zu finden. Falls $\eta(G) = \mathbf{S}^n 0$, so ist $G \eta(G) = \mathbf{f}$ und minimal.

Definieren sie η alternativ unter Verwendung des co-rekursionsoperators ${}^{\text{co}}\text{Rec}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}}$.

Aufgabe 18 (4 Punkte). Seien

$$\mathbb{N} = [0 : \mathbb{N}, \mathbf{S} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}], \quad \mathbb{P} = [1 : \mathbb{P}, S_0 : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}, S_1 : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}]$$

die unären, natürlichen und positiven, binären Zahlen. Definieren sie eine Übersetzung

$$\mathbf{nb}in : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}.$$

Es sollte also $\mathbf{nb}in m$ genau $(m+1)_2$ in der Basis 2 entsprechen. Definieren sie zuerst eine Programm-konstante für division $\dot{z}$ mit rest.

Aufgabe 19 (8 Punkte). a) Der co-rekursions-operator und destruktoren der Algebra $\mathbb{S}[\alpha]$ sind definiert als die folgenden Programm-konstanten.

$$\begin{aligned} {}^{\text{co}}\text{Rec}_{\mathbb{S}[\alpha]}^{\tau} : (\tau \rightarrow \alpha \times (\mathbb{S}[\alpha] + \tau)) &\rightarrow \tau \rightarrow \mathbb{S}[\alpha] & D_{\mathbb{S}[\alpha]} : \mathbb{S}[\alpha] &\rightarrow \alpha \times \mathbb{S}[\alpha] \\ {}^{\text{co}}\text{Rec}_{\mathbb{S}[\alpha]}^{\tau} \mathbf{F} \mathbf{x} &= \lambda_{\mathbf{p}} (\mathbf{p}_0 :: [\lambda_{s\tau} s, {}^{\text{co}}\text{Rec}_{\mathbb{S}[\alpha]}^{\tau} \mathbf{f}] \mathbf{p}_1) (\mathbf{F} \mathbf{x}) & D_{\mathbb{S}[\alpha]}(\mathbf{x} :: \mathbf{u}) &= (x, u) \end{aligned}$$

Vervollständigen sie die Definitionen des *Map*-operator $\mathbf{Map}_{\mathbb{S}[\alpha]}^{\rho \rightarrow \sigma} : (\rho \rightarrow \sigma) \rightarrow \mathbb{S}[\rho] \rightarrow \mathbb{S}[\sigma]$ unten; verwenden sie dabei direkt die terme $D_{\mathbb{S}[\alpha]}$, paar-projectionen $(\cdot)_0, (\cdot)_1$ und die konstruktoren $\mathbf{In}_0, \mathbf{In}_1$ für typ-summen.

$$\mathbf{Map}_{\mathbb{S}[\alpha]}^{\rho \rightarrow \sigma} \mathbf{h}^{\rho \rightarrow \sigma} := {}^{\text{co}}\text{Rec}_{\mathbb{S}[\sigma]}^{\mathbb{S}[\rho]} (\dots)^{\mathbb{S}[\rho] \rightarrow \sigma \times (\mathbb{S}[\sigma] + \mathbb{S}[\rho])}$$

b) Wir definieren die Algebra der α -punktierten Listen über β , $\mathbb{L}_\alpha[\beta]$, und der abzählbar verzweigten, α -blättrigen Bäume $\mathbb{C}[\alpha]$

$$\mathbb{L}_\alpha[\beta] := \mu_\xi([\cdot] : \alpha \rightarrow \xi, (\cdot :: \cdot) : \beta \rightarrow \xi \rightarrow \xi), \quad \mathbb{C}[\alpha] := \mu_\xi(\text{Br} : \mathbb{L}_\alpha[\xi] \rightarrow \xi).$$

Definieren sie den zu $\mathbb{C}[\alpha]$ gehörigen Map-operator. Zu diesem Zweck bietet es sich an, gleichzeitig zwei Programm-konstanten einzuführen:

$$\begin{aligned} \mathbf{Map}_{\mathbb{C}[\alpha]}^{\rho \rightarrow \sigma} &: (\rho \rightarrow \sigma) \rightarrow \mathbb{C}[\rho] \rightarrow \mathbb{C}[\sigma] \\ \mathbf{Map}_{\mathbb{L}_\alpha[\mathbb{C}[\alpha]]}^{\rho \rightarrow \sigma} &: (\rho \rightarrow \sigma) \rightarrow \mathbb{L}_\rho[\mathbb{C}[\rho]] \rightarrow \mathbb{L}_\sigma[\mathbb{C}[\sigma]] \end{aligned}$$