



Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

SS 23
24. Mai 2023

Mathematische Logik II

Blatt 4

Abgabe. Mittwoch, 31. Mai 2023, 10:15, in Uni2Work oder in der Vorlesung.

Besprechung. Freitag, 2. Juni 2023, 8:30, A027.

Aufgabe 13 (4 Punkte). Ein Informationssystem $\mathbf{A} = (A, \text{Con}, \vdash)$ heißt *kohärent*, wenn es die folgende Eigenschaft hat. $U \subseteq A$ ist konsistent genau dann, wenn alle zwei-elementigen Teilmengen von U konsistent sind. Zeigen sie, dass die Kohärenz von $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ aus der Kohärenz von $\mathbf{B}$ folgt.

Aufgabe 14 (4 Punkte). Für die Algebra $\mathbb{N}$ sei die Addition definiert als Programkonstante $+: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit den Berechnungsregeln

$$n + 0 := n, \quad n + Sm := S(n + m).$$

Zeigen sie mittels Angabe einer Herleitung jeweils

$$\vdash \forall_n 0 + n = n, \quad \vdash \forall_{n,m} Sn + m = S(n + m).$$

Verwenden sie dabei die Regel

$$\frac{A(0) \quad \forall_n (A(n) \rightarrow A(n+1))}{\forall_n A(n)} \text{Ind}_{\mathbb{N}}$$

das Axiom **Ref1** : $\forall_n n = n$ und ersetzen sie (Sub-)Terme gemäß Berechnungsregeln (von links nach rechts) e.g., $(n + m + 0) \mapsto (n + m)$.

Aufgabe 15 (4 Punkte). Definieren sie

- a) Die Funktion $A : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{N}$, die jedem binären Baum die Anzahl seiner Blätter zuordnet (i) durch Berechnungsregeln (ii) mittels $\mathcal{R}_{\mathbb{Y}}$.
- b) Das unendliche ideal $\infty : \mathbb{N}$, (i) durch Berechnungsregeln (ii) mittels ${}^{co}\mathcal{R}_{\mathbb{U}}^{\mathbb{N}}$.

Aufgabe 16 (4 Punkte). Formalisieren sie Aufgabe 15 in Minlog.