



Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg
Nils Köpp

SS 23
17. Mai 2023

Mathematische Logik II

Blatt 3

Abgabe. Mittwoch, 24. Mai 2023, 10:15, in Uni2Work oder in der Vorlesung.

Besprechung. Freitag, 26. Mai 2023, 8:30, A027.

Aufgabe 9 (4 Punkte). Seien $\iota := \mu_\xi(\mathbf{C}^\iota : \xi \rightarrow \xi)$ und $\vartheta := \mu_\xi(\mathbf{C}^\vartheta : (\xi)_{i < k} \rightarrow \xi)$ Typen ohne freie Parameter.

- a) Zeigen sie, dass alle co-totalen Ideale $x \in \mathbf{C}_\iota$ unendlich sind.
- b) Angenommen alle Ideale $x \in \mathbf{C}_\vartheta$ sind endlich. Zeigen sie, dass ϑ nicht-rekursiv ist, d.h. $k = 0$.

Aufgabe 10 (4 Punkte). Seien $\mathbf{A}_i = (A_i, \text{Con}_i, \vdash_i)$ Informationssysteme und

$$\mathcal{B}_i := \{ \mathcal{O}_U := \{ x \in |\mathbf{A}_i| \mid U \subseteq x \} \mid U \in \text{Con}_i \}$$

die Basis der Scott-topologie für $i = 0, 1$. Zeigen sie für $f : |\mathbf{A}_0| \rightarrow |\mathbf{A}_1|$ die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen.

- a) f ist stetig bezüglich der Scott-topologie.
- b) f ist monoton d.h., $x \subseteq y$ bedingt $fx \subseteq fy$, und für jede gerichtete Menge $D \subseteq |\mathbf{A}_0|$ (also $x, y \in D$, dann $x \cup y \in D$) gilt

$$f \left[\bigcup_{x \in D} x \right] = \bigcup_{x \in D} f(x)$$

Aufgabe 11 (4 Punkte). Wir betrachten die folgenden Algebren

$$\mathbb{B} := \mu_\xi(\mathbf{f} : \mathbb{B}, \mathbf{t} : \mathbb{B})$$

$$\mathbb{S}(\mathbb{B}) := \mu_\xi(\mathbf{SCons} : \mathbb{B} \rightarrow \xi \rightarrow \xi)$$

$$\mathbb{Y} := \mu_\xi(- : \xi, \mathbf{Br} : \xi \rightarrow \xi \rightarrow \xi)$$

Geben sie eine approximierbare Abbildung $r \in |\mathbf{C}_{\mathbb{S}(\mathbb{B}) \rightarrow \mathbf{Y}}|$ an und zeigen sie, dass die dazugehörige (Scott-)stetige Funktion $\hat{r} : |\mathbf{C}_{\mathbb{S}(\mathbb{B})}| \rightarrow |\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}|$ injektiv ist.

Aufgabe 12 (4 Punkte). Wir definieren induktiv die Relation $A \triangleleft^+ B$ [und $A \triangleleft^- B$] i.e., A ist eine positive [bzw. negative] Teil-formel von B . Dabei beschränken wir uns auf das $\rightarrow$ -Fragment.

$$A \triangleleft^+ A \quad (A \rightarrow B) \triangleleft^+ C \Rightarrow \begin{cases} A \triangleleft^- C, \\ B \triangleleft^+ C. \end{cases} \quad A \rightarrow B \triangleleft^- C \Rightarrow \begin{cases} A \triangleleft^+ C, \\ B \triangleleft^- C. \end{cases}$$

Ferner seien $P, Q \in \mathbf{Pvar}$ mit $P \triangleleft^+ A$ und $Q \triangleleft^- B$ mit jeweils höchstens einem Vorkommen. Zeigen sie,

$$R \rightarrow S \vdash A[P/R] \rightarrow A[P/Q], \quad S \rightarrow R \vdash A[P/R] \rightarrow A[P/Q].$$